2021 Revision

දෛශික

Ruwan Darshana B.Sc. (Hons)

A මූලික සංකල්ප ආශ්‍රිත ගැටළු

01. ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ ද, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ ද වේ. P, Q, R, S යනු පිළිවෙලින් AB, BC, CD, DA වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් පහත ඒවා සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{DC}$ (ii) $\overrightarrow{BC}$ (iii) $\overrightarrow{AP}$ (iv) $\overrightarrow{BQ}$ (v) $\overrightarrow{AC}$

02. ABC ත්‍රිකෝණයකි. BC පාදය BD : DC = 3 : 1 ලෙස අභ්‍යන්තරව D ලක්ෂ්‍යයෙන් බෙදෙනු ලැබේ. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ ද, $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ ද වේ. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{BC}$ (ii) $\overrightarrow{AD}$

03. PQRS සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$ සහ $\overrightarrow{PS} = \underline{b}$ වේ. X යනු SR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයි. පහත දැක්වෙන දෛශික $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{QR}$ (ii) $\overrightarrow{RS}$ (iii) $\overrightarrow{PR}$ (iv) $\overrightarrow{PX}$

04. ABCD යනු ත්‍රපීසියමේ AD සහ BC පාද සමාන්තර වන අතර AD පාදයේ දිග BC පාදයේ දිග මෙන් හතර ගුණයකි. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ සහ $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ වේ. EC = 3BC වන සේ E ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත. පහත දැක්වෙන දෛශික $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{CD}$ (ii) $\overrightarrow{AE}$ (iii) $\overrightarrow{DB}$ (iv) $\overrightarrow{DE}$

05. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{AB} = 3\underline{a}$ හා $\overrightarrow{AC} = 3\underline{b}$ වේ. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද P යනු BP : PC = 2 : 1 වන සේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ. AP හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ය. $\overrightarrow{AP}$ හා $\overrightarrow{DE}$, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් සොයන්න.

06. OABC සෘජුකෝණාස්‍රයේ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ සහ $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වන අතර OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M ද CB මත N පිහිටන්නේ CN : NB = 2 : 1 වන සේ ද වෙයි. $\underline{a}$ හෝ $\underline{b}$ මගින් හෝ $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ මගින් හෝ මේවා ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\overrightarrow{OC}$ (ii) $\overrightarrow{ON}$ (iii) $\overrightarrow{MO}$ (iv) $\overrightarrow{MN}$

07. ABCDEF යනු සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. $\overrightarrow{DC} = \underline{a}$ සහ $\overrightarrow{FC} = 2\underline{b}$ වේ. පහත දැක්වෙන දෛශික $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{ED}$ (ii) $\overrightarrow{EB}$ (iii) $\overrightarrow{DE}$ (iv) $\overrightarrow{AE}$

08. ABCD චතුරස්‍රයේ A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවලදී පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ වෙයි. P, Q, R සහ S යනු පිළිවෙලින් AB, BC, CD සහ DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වෙයි.

(i) P, Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

(ii) $\overrightarrow{PQ}$ සහ $\overrightarrow{SR}$ හි අගය $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ මගින් සොයන්න.

(iii) ඒ නයින් PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

09. OABC ත්‍රපීසියමේ OA = a සහ OB = b වෙයි. OA සහ CB සමාන්තර ද OA = 2CB වෙයි. a හෝ b හෝ a සහ b මගින් මේවා ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\overrightarrow{CB}$ (ii) $\overrightarrow{BA}$ (iii) $\overrightarrow{CA}$ (iv) $\overrightarrow{CO}$

10. A, B වල පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$, $\underline{b}$ වේ. E යනු AB අභ්‍යන්තරව 3:1 බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයක් වේ. $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{1}$ වේ. E වල පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

11. A, B, C වල පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ වේ. D යනු AB වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. E යනු BC රේඛාව අභ්‍යන්තරව $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{3}$ බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයක් වේ.

(i) D වල පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

(ii) E වල පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

(iii) DE සොයන්න.

12. පහත දී ඇති ප්‍රකාශන සුළු කරන්න.

(i) $4(\underline{a} + 5\underline{b}) + 2(3\underline{a} - 4\underline{b})$

(ii) $3(\underline{a} + 2\underline{b} - c) - 5(2\underline{a} - 3\underline{b} + \underline{c})$

(iii) $2(\underline{a} - 3\underline{b} + 5\underline{c}) + (-3\underline{a} + \underline{b} - c)$

(iv) $-3(2\underline{a} + 5\underline{b} - c) + (2\underline{a} + 3\underline{b} - c)$

B

13. OABC සමාන්තරාස්‍රයකි. A, B වල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ වේ.

(i) OC , CA සොයන්න.

(ii) $|\underline{a}+\underline{b}| = |\underline{a}-\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

(iii) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}+\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

(iv) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}-\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

14. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු ඕනෑම දෛශික දෙකකි. $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}+\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

15. a හා $\underline{b}$ යනු අභිශූන්‍ය නොවන දෛශික දෙකකි. $|\underline{a}+\underline{b}|$ මගින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි නම්, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර පවතින සම්බන්ධතාව කුමක්ද?

16. $\underline{a}$, $\underline{b}$ හා $\underline{c}$ යනු ඕනෑම දෛශික තුනක් නම් මේවා සාධනය කරන්න.

(i) $|\underline{a}| + |\underline{b}| \geq |\underline{a}+\underline{b}|$ (ii) $|\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| \geq |\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}|$

17. $\overrightarrow{OA} = |\underline{a}|$ සහ $\overrightarrow{OB} = |\underline{b}|$ නම් OABC සමාන්තරාස්‍රයෙහි $\overrightarrow{OC}$, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ මගින් සොයන්න. $\overrightarrow{BA}$, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ මගින් සොයන්න.

(i) $|\underline{a}+\underline{b}| = |\underline{a}-\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

(ii) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}-\underline{b}|$ නම් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

C

18. A, B, C ඒක රේඛීය නොවූ ලක්ෂ්‍යය තුනකි. $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{AC} = 3\underline{a}$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය $\overrightarrow{AD} = 3\underline{a} + \underline{b}$ වන පරිදි පිහිටා ඇත. CD මත E පිහිටා ඇත්තේ DE : EC = 1 : 2 වන පරිදිය.

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(9\underline{a} + 2\underline{b})$ බව පෙන්වන්න. BC සහ AE රේඛා A හිදී ඡේදනය වේ. λ නියතයක් නම්,

$\overrightarrow{FB} = \underline{b} - \frac{\lambda}{3}(9\underline{a} + 2\underline{b})$ බව පෙන්වන්න. CF : FB = 2 : 3 බව ද පෙන්වන්න.

19. ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ වේ. E යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. AE සහ BD රේඛා F හිදී ඡේදනය වේ. $\frac{AF}{FE}$ අනුපාතය සොයන්න.

20. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ ද, $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ ද වේ. D යනු $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$ බෙදෙන BC මත ලක්ෂ්‍යයක් වේ. E යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. AD හා BE රේඛා H හිදී ඡේදනය වේ. $\frac{AH}{HD}$ සොයන්න.

21. P, Q යනු $\overrightarrow{OP} = 2\underline{a}$ ද, $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\ \underline{b}$ ද වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය දෙකකි. AB හිත් PQ හිත් ඡේදන ලක්ෂ්‍යය R ය. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{OR}$ සඳහා ප්‍රකාශන දෙකක් ලබාගෙන ඒ ආශ්‍රයෙන් AR : RB හා PR : RQ යන අනුපාතය සොයන්න. මෙහි $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු A සහ B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික වේ.

22. ABCD යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ ද $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ ද වේ. BC මත E ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ BE : EC = 2 : 3 වන අන්දමිනි. AE සහ BD රේඛා F ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වේ. AF : FE අනුපාතය සහ BF : FD අනුපාතය සොයන්න.

23. ABC යනු ඕනෑම ත්‍රිකෝණයකි. මෙහි AB මත D ලක්ෂ්‍යයක් ද BC මත E ලක්ෂ්‍යයක් ද පිහිටා ඇත්තේ AD : DB = 3 : 5 සහ BE : EC = 4 : 3 වන අන්දමිනි. AE සහ CD රේඛා G ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වේග CG : GD අනුපාතය 2 : 1 බවත් AG : GE අනුපාතය 7 : 5 බවත් පෙන්වන්න.

24. a සහ b අභිශූන්‍ය නොවූ ඕනෑම දෛශික යුගලයක් නිරූපණය කරයි නම් ද λ සහ μ අදිශ පරාමිති වේ නම් ද $\lambda a + \mu b$ දෛශිකය 0 යන අභිශූන්‍ය දෛශිකයට ඌනනය වන්නේ කවර අවශ්‍යතාවය සම්පූර්ණ වූ විට දී දැයි සඳහන් කරන්න.

OACB සමාන්තරාස්‍රයකි. AC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද, AB විකර්ණය සහ OD රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E ද වෙයි.

(i) $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ නම් a සහ b මගින් $\overrightarrow{OD}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $\overrightarrow{BE}$, a සහ b මගින් ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) $AE = \frac{1}{3}\ AB$ බව පෙන්වන්න.

25. OAB ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{OA} = a$ ද, $\overrightarrow{OB} = \text{b}$. M යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන අතර OB මත ON : NB = 1 : 4 වන සේ වූ N ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. OM සහ AN රේඛා P හිදී ඡේදනය වෙයි.

(i) $\overrightarrow{OP} = l\,\overrightarrow{OM} = l\,\dfrac{(a + \text{b})}{2}$ බව පෙන්වන්න. l අදිශයකි. මෙලෙසම $\overrightarrow{OP} = a + \text{m}\left(\dfrac{1}{5}\text{b} - a\right)$ බව පෙන්වන්න. m අදිශයකි.

(ii) AP : PN = 5 : 1 බව අපෝහනය කරන්න.

26. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් OAB ත්‍රිකෝණයේ A සහ B ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a සහ b ද, OA සහ AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් C සහ D ද වෙයි.

(i) CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M හි පිහිටුම් දෛශිකය $\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{4}\text{b}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) BM රේඛාව $\lambda : 1 - \lambda$ අනුපාතයට බෙදනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය a, b සහ λ මගින් සොයන්න. ඒනයින්

(iii) BM සහ OA රේඛා, ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශික $\dfrac{2}{3}a$ බව පෙන්වන්න.

27. A හා B යනු OA = $\underline{a}$ හා OB = $\underline{b}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. M යනු OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන අතර X යනු OX : XB = 3:1වන සේ OB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද Y යනු AY : YX = 4 : 1 වන සේ AX මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ.

(i) $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OX}$ හා $\overrightarrow{OY}$ සඳහා ප්‍රකාශන $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $\overrightarrow{BY} = \dfrac{1}{5}(\underline{a} - 2\underline{b})$ බව පෙන්වන්න.

(iii) B, Y හා M ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

(iv) BY : YM අනුපාතය ගණනය කරන්න.

28. P සහ Q ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් p සහ q වෙයි. PQ රේඛාව $\lambda : \mu$ අනුපාතයට බෙදන R ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a, b, c වෙයි. පහත දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

(i) BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන L ලක්ෂ්‍යය

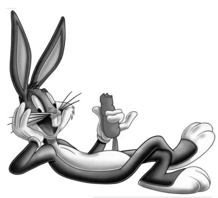
(ii) AL රේඛාව 2 : 1 අනුපාතයට බෙදන M ලක්ෂ්‍යය
ඒ නයින් ABC ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථ සංගාමී (ඒක ලක්ෂී) බව පෙන්වන්න.

29. O මූල ලක්ෂ්‍යයට සමුද්දේශයෙන් A, B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ වෙයි. R යනු AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. A, B ලක්ෂ්‍යය දෙක OR මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයකට යා කරන රේඛා OB, OA රේඛා පිළිවෙලින් S සහ T හි දී කපයි. $\dfrac{AR}{RB} = 1$, $\dfrac{BS}{SO} = 2$, $\dfrac{OT}{TA} = r$ නම් $\overrightarrow{OR} = \dfrac{(\underline{a} + \underline{b})}{2}$ බව ද $\overrightarrow{OC} = (2r\underline{a} + \underline{b}) / (3 + 2r)$ බව ද පෙන්වන්න. $r = \dfrac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

30. A සහ B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ වේ. AC : CB = 2 : 3 වන පරිදි AB මත C ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටයි. D සහ E ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $(\underline{a} + \underline{b})$ සහ $\left(\dfrac{(-\underline{a} - 4\underline{b})}{5}\right)$ වෙයි. C, D, E ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව පෙන්වා DC : CE අනුපාතය සොයන්න.

31. A, B, P, Q ලක්ෂ්‍යය හතරක පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\dfrac{1}{3}\underline{b}$ සහ $\dfrac{1}{4}\underline{a}$ වේ. O යනු මූලයයි. $\underline{a}$, $\underline{b}$ අසමාන්තර සහ අභිශූන්‍ය නොවන දෛශික වේ. OAB ත්‍රිකෝණයේ OB, OA, AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් D, E, F වේ. ED සහ AB සමාන්තර බව පෙන්වන්න. AP සහ EF , L හිදී ද, BQ සහ DF, M හිදී ද හමුවේ. L ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\dfrac{1}{2}\underline{a} + \dfrac{1}{6}\underline{b}$ බව පෙන්වන්න. PQ, AB පාද R හිදී හමුවේ නම් R හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. OR , ED පාද N හිදී හමුවේ නම් N හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. L, M, N ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

D



32. O මූලයකට සාපේක්ෂව A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $-2\underline{a} + 3\underline{b}$, $11\underline{a} - \underline{b}$ සහ $37\underline{a} - 9\underline{b}$ වෙයි. $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ යනු අසමාන්තර දෛශික දෙකකි. A, B, C ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව පෙන්වා B ලක්ෂ්‍යය මගින් AC බෙදනු ලබන අනුපාතය සොයන්න.

33. $\underline{a} + 3\underline{b}$, $3\underline{a} - 2\underline{b}$, $7\underline{a} - 12\underline{b}$ පිහිටුම් දෛශික මගින් නිරූපණය වන A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක් ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න. C මගින් AB බෙදන අනුපාතය ද සොයන්න.

34. P, Q, R සහ S යනු $\overrightarrow{PQ} = 3\underline{a}$, $\overrightarrow{PR} = 2\underline{b}$ හා $\overrightarrow{PS} = 6\underline{b} - 6\underline{a}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය හතරකි. Q, R සහ S ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

35 . $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ හා $\overrightarrow{OC}$ දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$, $\underline{b}$ හා $\underline{c}$ වේ නම් $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{0}$ සහ $\alpha + \beta + \gamma = \underline{0}$ නම් A, B සහ C ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

36. OABC සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DE} = \frac{1}{1+\lambda}$ DC වේ. O, E, B ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

37. a සහ b යනු දෙන ලද දෛශික දෙකකි. $\overrightarrow{OP} = a + b$, $\overrightarrow{OQ} = 2a + 3b$ සහ $\overrightarrow{OR} = 5a + 9b$ වන සේ P, Q සහ R ලක්ෂ්‍ය පිහිටයි. PQ සහ QR දෛශික a සහ b මගින් සොයන්න. ඒ නයින් P, Q, R ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව අපෝහනය කරන්න. PQ : QR = 1 : 3 බව ද පෙන්වන්න.

38. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a , b, c වෙයි. $-a + b = -b + c$ වන විට A, B, C ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

39. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a , b, c වෙයි. $ka + 2b = 3c$ නම් ද, A, B, C ඒකරේඛීය නම් ද k හි අගය සොයන්න.

E

40. $\underline{a} = 3\,\underline{i} + 4\,\underline{j}$, $\underline{b} = \underline{i} - 2\,\underline{j}$ නම්, පහත ඒවා සුළු කරන්න.

(i) $\underline{a} + \underline{b}$ (ii) $5\underline{a} + 2\underline{b}$ (iii) $3\underline{a} - 2\underline{b}$

41. $\overrightarrow{OA} = \underline{i} + 2\,\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\,\underline{i} - \underline{j}$, $\overrightarrow{OC} = -\underline{i} + 5\,\underline{j}$ නම් $\overrightarrow{AB}$ සහ $\overrightarrow{CA}$ සොයන්න. ඒනයින් A, B, C ඒකරේඛීය බව ද පෙන්වන්න.

42. O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $2\,\underline{i} + 3\,\underline{j}$ හා $\underline{i} + 5\,\underline{j}$ වෙයි. මේවා සොයන්න.

(i) $\overrightarrow{AB}$ දෛශිකය

(ii) AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය

(iii) $\overrightarrow{AB}$ හි විශාලත්වය මෙන් පස් ගුණයක විශාලත්වයක් ඇත්තා වූ ද $\overrightarrow{OB}$ ට සමාන්තර වූ ද දෛශික දෙක

43. ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රය මුළුමනින්ම පළමු වෘත්ත පාදකය තුළ පිහිටයි. $\overrightarrow{OA} = 3\,\underline{i} + \underline{j}$ ද, $\overrightarrow{OB} = 5\,\underline{i} + \underline{j}$ ද වන්නේ නම් C, D, E, F ලක්ෂ්‍යය හතරෙහි පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

44. $\overrightarrow{OA} = \underline{i} + 2\,\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\,\underline{i} - \underline{j}$, $\overrightarrow{OC} = -\underline{i} + 5\,\underline{j}$ නම් $\overrightarrow{AB}$ සහ $\overrightarrow{CA}$ සොයන්න. ඒනයින් A, B, C ඒකරේඛීය බව ද පෙන්වන්න.

45. P, Q, R ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් $\underline{i} + \underline{j}$, $\lambda\,\underline{i} + 2\,\underline{j}$, $3\,\underline{i} - 4\,\underline{j}$ වේ. P, Q, R ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය වේ නම්, λ සොයන්න. RP : PQ = 5 : 1 බව ද පෙන්වන්න.

46. $\overrightarrow{OA} = 2\,\underline{i} + 3\,\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 9\,\underline{i} + 17\,\underline{j}$ නම් AB රේඛාව 4 : 3 අනුපාතයට බෙදන C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ මගින් සොයන්න.

F

47. $a \cdot b$ සහ $|a \times b|$ සොයන්න.

(i) $|a| = |b| = 4$, $\theta = 60^0$

(ii) $|a| = 5$, $|b| = 8$, $\theta = 90^0$

(iii) $|a| = 4$, $|b| = 2$, $\theta = 0^0$

(iv) $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 1$ $\theta = 150^0$

(v) $|b| = 3$, $|a| = 2\sqrt{2}$, $\theta = 135^0$

48. සුළු කරන්න.

(i) $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b})$

(ii) $2\underline{a} \cdot (3\underline{b} - 2\underline{a})$

49. පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(i) $\underline{a} \cdot (2\underline{a} + 3\underline{b}) = 0$ සහ $|\underline{b}| = 2\,|\underline{a}|$

(ii) $\underline{a} \cdot (3\underline{a} - 4\underline{b}) = 0$ සහ $5\,|\underline{b}| = |\underline{a}|$

50. OABCD පංචාස්‍රය පවතින්නේ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ද, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ ද, $AB = 4\underline{d}$ ද $\overrightarrow{CB} = \dfrac{a}{2}$ ද වන පරිදිය. OB හා AD පාදවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E නම් $\overrightarrow{OE} = \dfrac{a + 4d}{5}$ බව පෙන්වන්න. $OE \perp AD$ නම් ද, $3\,|\underline{a}| = 4\,|\mathrm{d}|$ නම් ද $A\hat{O}D = \theta$ නම් ද $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{9}\right)$ බව පෙන්වන්න.

51. $|a| = 4, |b| = 5$ ද වන අතර $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දිශා අතර කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ කි. $\underline{a} \cdot \underline{b}$ සොයන්න.
$|3\underline{a} + 7\underline{b}|, |4\underline{a} - 5\underline{b}|$ හා $(3\underline{a} + 7\underline{b}) \cdot (4\underline{a} - 5\underline{b})$ ගණනය කරන්න. එනයින් $3\underline{a} + 7\underline{b}$ හා $4\underline{a} - 5\underline{b}$ දෛශික දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

52. a හා b දෛශික දෙකක තිත් ගුණිතය වන $a \cdot b$ අර්ථ දක්වන්න.
$|a + b|^2 = |a|^2 + 2(a \cdot b) + |b|^2$ බව පෙන්වන්න. $|a + b|^2 = |a - b|^2$ නම් $a \cdot b = 0$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමාන නම්, එය සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

53. a හා b දෛශික දෙක කෙසේ ද යත් $a\,(a - b)$ ට ලම්බ වෙයි. b ගේ විශාලත්වය a ගේ විශාලත්වය මෙන් තෙගුණයක් නම්, b, $ka + b$ ට ලම්බ වන සේ k හි අගය තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් සොයන්න.

54. a හා b අභිශූන්‍ය නොවන දෛශික දෙකක් විට $a \cdot b = \dfrac{1}{4}\{|\underline{a} + \underline{b}|^2 - |\underline{a} - \underline{b}|^2\}$ බව පෙන්වන්න.

55. $\underline{a} = 2\underline{i} - 5\underline{j}$ හා $\underline{b} = k\underline{i} + 2\underline{j}$ දෛශික එකිනෙකට ලම්බ වෙයි.

(i) k හි අගය සොයන්න. (ii) $|\underline{a}|$ හා $|\underline{b} - \underline{a}|$ සොයන්න.

(iii) $\underline{a}\,(\underline{b} - \underline{a})$ සොයන්න. (iv) $\underline{a}$ හා $(\underline{b} - \underline{a})$ අතර කෝණය සොයන්න.

56. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ නිශ්ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ $\underline{a} \cdot \underline{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(a) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\underline{a}$ ත් $\underline{b}$ ත් අතර කෝණය සොයන්න.

(i) $\underline{a} \cdot (a - b) = 0$ සහ $|b| = 2|\underline{a}|$ (ii) $|\underline{a}| = |b| = |\underline{a} + \underline{b}|$

(b) A, B, C, D යනු චතුශ්තලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න.

57. $\overrightarrow{OA} = \underline{a} + 2\underline{b}$ සහ $\overrightarrow{OB} = 3\underline{a} - \underline{b}$ වේ. OA රේඛාව OB ට ලම්බ වේ. $\underline{a} \cdot \underline{b}$ සොයන්න.
$|\underline{a}| = 2, |b| = 1$ නම් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

58. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු $|\underline{a}| = 3, |\underline{b}| = 2$ ද $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ ද වන දෛශික දෙකකි. මේවා සොයන්න.

(i) $\underline{a} \cdot \underline{b}$ (ii) $|\underline{a} + \underline{b}|$ (ii) $|\underline{a} - \underline{b}|$

(iv) $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b})$ (v) $\underline{a} + \underline{b}$ හා $\underline{a} - \underline{b}$ දෛශික දෙකේ දිශා අතර කෝණය

59. $\overrightarrow{OA} = \underline{a} + 2\underline{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\underline{a} - \underline{b}$ හා $OA \perp OB$ නම් $\underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{2}{5}|\underline{b}|^2 - \frac{3}{5}|\underline{a}|^2$ බව පෙන්වන්න.
$|\underline{a}| = 2$ හා $|\underline{b}| = 1$ නම් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

60. $i + 3j$, $-2i - j$, $i - j$ යන බල පිළිවෙලින් $2i + 5j$, $4j$, $-i + j$ ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතිය බල යුග්මයකට තුල්‍ය බව පෙන්වන්න. බල යුග්මයේ ඝූර්ණය ද සොයන්න. බල නිව්ටන මගින් ද ඛණ්ඩාංක මීටර මගින් ද ගෙන තිබේ.

61. පිහිටුම් දෛශික $4\underline{i} + 3\underline{j}$, $-\underline{i} - 2\underline{j}$, $5\underline{i}$ වන ABC හිදී පිළිවෙලින් ක්‍රියා කරන $\underline{F}_1 = 8\underline{i} + 6\underline{j}$, $\underline{F}_2 = 3\underline{i} + \underline{j}$ $\underline{F}_3 = -6\underline{i} - 3\underline{j}$ බල වල සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

62. $-4\underline{i} + 3\underline{j}$, $6\underline{i} - 7\underline{j}$ හා $-2\underline{i} + 4\underline{j}$ මගින් නිරූපණය වන බල තුනක් පිළිවෙලින් $(2, -1)$, $(-3, 1)$, $(4, 0)$ යන ඛණ්ඩාංක ඇති ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න.

63. Ox, Oy දිශාවේ ඒකක දෛශික $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ වේ. $3\underline{i} + \underline{j}$ ට හා $-\underline{i} + \underline{j}$ ට සමාන්තර දෛශිකවලින් දැක්වෙන බල දෙකක් හා $5\underline{i} - \underline{j}$, $3\underline{i} + 5\underline{j}$ දෛශිකවලින් දැක්වෙන බල පිළිවෙලින් $A \equiv (-1, 0)$, $B \equiv (0, -5)$, $C \equiv (3, 4)$ හා $D \equiv (-1, 3)$ යන ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම් A හා B ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරන බලවල විශාලත්ව සොයන්න. බල යුග්මයේ විශාලත්වය ද සොයන්න.

64. $3\underline{i} + \underline{j}$, $2\underline{i} + 4\underline{j}$, $\underline{i} + 5\underline{j}$ හා $X\underline{i} + Y\underline{j}$ යන බල පිළිවෙලින් $-6\underline{i}$, $-\underline{i} - 4\underline{j}$, $\underline{i} + 2\underline{j}$ හා $2\underline{i} + 3\underline{j}$ වූ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරයි.

(i) බල පද්ධතිය G යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම්, X, Y හා G හි අගය සොයන්න.

(ii) $X = 3$ හා $Y = -1$ නම් බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

65. ABCDEF යනු පාදයක දිග a වූ සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. P, 2P, 3P, 5P සහ 6P බල පිළිවෙලින් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$ හා $\overrightarrow{AF}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

(i) මෙම බල, $X\underline{i} + Y\underline{j}$ ආකාරයෙන් දක්වන්න. මෙහි $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ යනු AB හා AE ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ.

(ii) ED ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බලයක් මගින් මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

(iii) මෙම බල යුග්මයේ ඝූර්ණය $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Pa බව පෙන්වන්න. මෙහි a යනු ෂඩාස්‍රයේ පාදයක දිග වේ.

66. O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $4\underline{i} + 3\underline{j}$ සහ $3\underline{i} - 4\underline{j}$ වේ. B යනු OABC සමාන්තරාස්‍රයේ අනිත් ශීර්ෂය වේ. B හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. නිව්ටන් 5, $10\sqrt{2}$ සහ 10 විශාලත්ව ඇති බල පිළිවෙලින් $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ සහ $\overrightarrow{CO}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. මෙම එක් එක් බලය $X\underline{i} + Y\underline{j}$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

67. ABCDEF යනු පාදයක දිග 2m වන සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. ෂඩාස්‍රයේ කේන්ද්‍රය වන O මූල ලක්ෂ්‍යය ද M, BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ. OD හා OM දිශාවේ ඒකක දෛශික $\underline{i}$, $\underline{j}$ විට A, B, C, D, E සහ F ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ හා $\overrightarrow{FA}$ පාද දිගේ පිළිවෙලින් විශාලත්ව නිව්ටන් $\frac{1}{2}$, 10, $\frac{1}{2}$, 11, 14 සහ $\frac{1}{2}$ යන දෛශිකවලින් නිරූපණය වන බල ක්‍රියා කරයි. එක් එක් බලය $X\underline{i} + Y\underline{j}$ ආකාරයෙන් දක්වන්න. O ලක්ෂ්‍යයේදී බල පද්ධතිය නිරූපණය වන දෛශිකය හා යුග්මය සොයන්න.

68. නිව්ටන් P, 7P, 8P, 7P සහ 3P යන බල පාදයක දිග මීටර a වන ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රයක පිළිවෙලින් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ සහ $\overrightarrow{FE}$ දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. AB සහ AE දිශාවලට ඒකක දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ ලෙස ගනිමින්,

(i) එක් එක් බලය $\underline{i}$, $\underline{j}$ සහ P ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) දෙන ලද බල පද්ධතිය $\overrightarrow{BC}$ ට සමාන්තර වූ $2P(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$ තනි R සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

(iii) R හි විශාලත්වය සොයන්න.

69. ඒකතල බල පද්ධතියක් මත පහත දැක්වෙන ආකාරයේ බල තුනක් ක්‍රියා කරයි.

(a) මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යමින් $4\underline{i} + 3\underline{j}$ දෛශිකයට සමාන්තර වන එහි දිශාවට ම වූ 15N බලය

(b) A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික $2\underline{i} + 3\underline{j}$ හා $-3\underline{i} - 9\underline{j}$ වන විට $2\overrightarrow{AB}$ බලය

(c) පිහිටුම් දෛශිකය $2\underline{i} + \underline{j}$ හරහා යන $4\underline{i} + 7\underline{j}$ බලය

ඒකක නිව්ටන් හා මීටර වලින් දී ඇත්නම්,

(i) (a) හි සඳහන් වන බලය $X\underline{i} + Y\underline{j}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය සොයන්න.

(iii) $(a, -4)$ ඛණ්ඩාංක ඇති ලක්ෂ්‍යයේදී $\underline{F}$ නම් බලයක් යෙදූ විට බල පද්ධතිය සමතුලිත වේ. F හා a සොයන්න.

70. $3\underline{i} + \underline{j}$, $2\underline{i} + 4\underline{j}$, $\underline{i} + 5\underline{j}$ හා $X\underline{i} + Y\underline{j}$ යන බල පිළිවෙලින් $-6\underline{i}$, $-\underline{i} - 4\underline{j}$, $\underline{i} + 2\underline{j}$ හා $2\underline{i} + 3\underline{j}$ වූ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරයි.

(i) බල පද්ධතිය G යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම්, X, Y හා G හි අගය සොයන්න.

(ii) $X = 3$ හා $Y = -1$ නම් බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

71. $\underline{i} - 4\underline{j}$, $3\underline{i} + 6\underline{j}$, $-9\underline{i} + \underline{j}$ හා $5\underline{i} - 3\underline{j}$ මගින් නිරූපණය වන බල පද්ධතියක් $3\underline{i} - \underline{j}$, $2\underline{i} + 2\underline{j}$, $-\underline{i} - \underline{j}$ හා $-3\underline{i} + 4\underline{j}$ යන පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරයි.

(i) බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.

(ii) $\underline{i} - 4\underline{j}$ බලය $-3\underline{i} - 3\underline{j}$ ලක්ෂ්‍යයට විස්ථාපනය කළේ නම් පද්ධතිය සමතුලිතව පවතින බව පෙන්වන්න.

මිශ්‍ර ගැටළු

72. A, B, P, Q ලක්ෂ්‍යය හතරක පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\frac{1}{3}\underline{b}$ සහ $\frac{1}{4}\underline{a}$ වේ. O යනු මූලයයි. $\underline{a}$, $\underline{b}$ අසමාන්තර සහ අභිශූන්‍ය නොවන දෛශික වේ. OAB ත්‍රිකෝණයේ OB, OA, AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් D, E, F වේ. ED සහ AB සමාන්තර බව පෙන්වන්න. AP සහ EF, L හිදී ද BQ සහ DF, M හිදී ද හමු වේ. L ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{6}\underline{b}$ බව පෙන්වන්න. PQ, AB පාද R හිදී හමු වේ නම් R හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. OR, ED පාද N හිදී හමු වේ නම් N හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. L, M, N ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

73. A, B හා C ලක්ෂ්‍යය තුනක O අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$, $\underline{b}$ හා $\underline{c}$ වේ. BC රේඛාව මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති අතර $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{10}\overrightarrow{BC}$ බව දී ඇත.

(i) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{10}(9\underline{c} + \underline{b})$ බව පෙන්වන්න.

(ii) දෛශික තිත් ගුණිතය යොදා ගනිමින් AP හා BC ලම්භක බව දී ඇත්නම් $(9\underline{c} + \underline{b}) . (\underline{c} - \underline{b}) = 10\underline{a} . (\underline{c} - \underline{b})$ බව පෙන්වන්න.

(iii) තවදුරටත් OA, OB හා OC අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්භක වේ නම් $OC = \frac{1}{3}OB$ බව ද පෙන්වන්න.

74. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් OAB ත්‍රිකෝණයේ A සහ B ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a සහ b ද, OA සහ AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් C සහ D ද වෙයි.

(i) CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) BM රේඛාව $\lambda : 1 - \lambda$ අනුපාතයට බෙදනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$, $\underline{b}$ සහ λ මගින් සොයන්න. එනයින්,

(iii) BM සහ OA රේඛා, ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශික $\frac{2}{3}\underline{a}$ බව පෙන්වන්න.

75. ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B, C ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ වෙයි. AD මධ්‍යස්ථය 2 : 1 අනුපාතයට බෙදන ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ බව සාධනය කරන්න. එනයින් ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථ තුන ඒක ලක්ෂී බව පෙන්වන්න.

76. A, B, C, D ලක්ෂ්‍යය හතරක පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ ද, $\underline{d} = \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{6}\underline{c}$ ද වෙයි. $\frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5} = \frac{6\underline{d} - \underline{c}}{5}$ බව පෙන්වා ඒ නයින් AB සහ CD රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ මගින් සොයන්න. එම ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් AB රේඛාවත්, CD රේඛාවත් බෙදන අනුපාතය සොයන්න.

77. A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ වන අතර ABCD ත්‍රිපීසියමකි. AB සහ CD සමාන්තර ද AB : DC = 2 : 3 ද වෙයි.

$3\underline{a} - 3\underline{b} + 2\underline{c} - 2\underline{d} = 0$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

(i) AC සහ BD විකර්ණ ඡේදනය වන අනුපාතය 2 : 3 බව පෙන්වන්න.

(ii) AD සහ BC රේඛා ඡේදනය වන අනුපාතය –2 : 3 බව පෙන්වන්න.

78. P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ සහ $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ වෙයි.

(i) $\overrightarrow{PQ}$ සහ $\overrightarrow{QR}$ සොයන්න.

(ii) P, Q, R ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

(iii) PQ : QR අනුපාතය සොයන්න.

79. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, BC හා CA පාද මත පිළිවෙලින් P, Q හා R ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ AP : PB = 1 : 3 BQ : QA = 1 : 4 සහ CR : RA = 3 : 2 වන සේය. X යනු AB පාදය 1 : 7 අනුපාතයට බෙදෙනෙ ලක්ෂ්‍යයයි. $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{CP}$ දෛශිකය, $\overrightarrow{CX}$ ට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

80. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA සහ AB පාද මත P, Q සහ R ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ BP : PC = 1 : 3, CQ : QA = 3 : 1 සහ AR : RB = 1 : 1 වනසේය. $2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = 0$ බව පෙන්වන්න.

81. O, A සහ B යනු ඒකරේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍යය තුනකි. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වේ. P යනු AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් නම් හා $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ නම් $0 \leq n < 1$ වන විට $\underline{r} = (1-n)\,\underline{a} + n\underline{b}$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

82. OABC සමාන්තරාස්‍රයකි. OP : PA = 1 : 2 වන සේ OA මත P ලක්ෂ්‍යයක් ද AQ : QB = 1 : 3 වන සේ AB මත Q ලක්ෂ්‍යයක්ද පිහිටයි. OB රේඛාව PC පාදය L හිදී ද QC පාදය M හිදී ද හමුවේ. OL : LM : MB = 7 : 9 : 12 බව පෙන්වන්න.

83. O අනුබද්ධයෙන් A සහ B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a සහ b වෙයි. C සහ D යනු පිළිවෙලින් OA සහ AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වෙයි.

(i) CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) BM රේඛාව $\lambda : 1-\lambda$ අනුපාතයට බෙදන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය a , b සහ λ මගින් සොයන්න. ඒ නයින් BM සහ OA හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

84. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a , b , c වෙයි. ABC තලයේ පිහිටි R ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $r = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}\right) + \frac{1}{2}\underline{c}$ බව දී තිබේ. අනුපාත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් A, B, C ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් R හි පිහිටුම් දෛශිකය සඳහා ජ්‍යාමිතික අර්ථ නිරූපණයක් ඉදිරිපත් කරන්න. $r + \lambda\underline{a} + \mu\,(m\underline{b} + n\underline{c})$ සහ $\lambda + \mu = 1$ ආකාරයෙන් r ප්‍රකාශ කිරීමෙන් R හි පිහිටුම් දෛශිකය සෙවීම සඳහා තවත් ක්‍රමයක් උපයෝගී කරගන්න.

S ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{12}\underline{b} + \frac{1}{4}\underline{c}$ නම් $\underline{a} + \underline{r} = \frac{4}{3}\underline{a} + \frac{1}{6}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c}$ බව පෙන්වා S මගින් AR රේඛාව සමච්ඡේද කරන බව පෙන්වන්න.

85. a හා b යන නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$ ද වන විට $(a - b) . (a - b)$ අදිශ ගුණිතයේ අගය සැලකීමෙන්

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $a = |\,a\,|$, $b = |\,b\,|$ සහ $c = |\,a - b\,|$ ACB කෝණ සමච්ඡේදකය CL වන පරිදි AB මත L ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටයි. $\overrightarrow{CL} = l$ ද $l = \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$ ලෙස ගැනීමෙන් සහ a සහ b එක එකක් l සමග අදිශ ගුණිතය ගැනීමෙන් $\frac{\alpha}{\beta}$ සොයන්න.

$l = \frac{ba + ab}{a + b}$ බව පෙන්වන්න. තව ද $CL^2 = ab\left[1 - \frac{c^2}{(a + b)^2}\right]$ බව අපෝහනය කරන්න.

86. (i) O, A, B ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍යය තුනකි. $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ වේ. $\alpha a + \beta b = 0$ නම් $\alpha = 0$ සහ $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) a, b දෛශික මගින් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ නිරූපණය කෙරේ. සමාන්තරාස්‍රයේ එක් කෝණයක් $\cos^{-1}\left[\frac{a^2 - b^2}{|a - b|\,|a + b|}\right]$ බව පෙන්වන්න.

87. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a} + \underline{b}$, $2\underline{a} - 3\underline{b}$ සහ $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ වේ. මෙහි $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ අභිශුන්‍ය නොවන, සමාන්තරද නොවන දෛශික වන අතර α සහ β අදිශ වේ. A, B, C ඒක රේඛීය වේනම් α සහ β අතර පවතින සම්බන්ධය $4\alpha + \beta = 5$ බව පෙන්වන්න.

88. A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\alpha\underline{a} + \underline{b}$, $2\underline{a} + 3\underline{b}$, $4\underline{a} - \beta\underline{b}$ වේ. මෙහි α සහ β යනු අදිශයන්ය. A, B, C ඒක රේඛීය නම් α සහ β අතර පවතින සම්බන්ධතාවය $\alpha\beta - 2\beta + 3\alpha - 10 = 0$ බව පෙන්වන්න.

89. ABCD චතුස්තලයක A, B හා C ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික, D ශීර්ෂය අනුබද්ධයෙන්, පිළිවෙලින් a, b හා c වේ. D අනුබද්ධයෙන්,

(i) BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන, E හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

(ii) 2 : 1 අනුපාතයට AE බෙදෙන F ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$

(iii) 3 : 1 අනුපාතයට DF බෙදෙන G ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$

බව පෙන්වන්න. AG හා DE දෛශික සමීකරණ ලියා දක්වා, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන, H හි පිහිටුම් දෛශිකය D අනුබද්ධයෙන් $\frac{1}{3}(\underline{b} + \underline{c})$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

90. OAB යනු $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වන පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයක් ලෙස ගනිමු. E හා F යනු පිළිවෙලින් OA සහ OB මත OE : EA = OF : FB = 1 : 3 වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය ලෙස ගනිමු.
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\underline{a} - \underline{b}$ බව පෙන්වා, $BE^2 = \frac{1}{16}|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - \frac{1}{2}\underline{a}.\underline{b}$ බව අපෝහනය කරන්න.
AF^2 සඳහා මෙවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලියා, AF = BE නම් OA = OB බව අපෝහනය කරන්න.

91. OAB ත්‍රිකෝණයක් ලෙස ද D සහ E යනු පිළිවෙලින් OA සහ OB වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ලෙස ද ගනිමු. OA = a සහ OB = b ලෙස ද ගනිමු. $BD^2 = \frac{1}{4}(|\underline{a}|^2 + 4|\underline{b}|^2 - 4\,\underline{a}\,.\,\underline{b})$ බව පෙන්වන්න. BD සහ AE මධ්‍යස්ථ සමාන නම් OAB ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බව අපෝහනය කරන්න.

92. $|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 3$ ද වන අතර $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දිශා අතර කෝණය $\frac{2\pi}{3}$ කි. $\underline{a}\,.\,\underline{b}$ සොයන්න.
$|\underline{a} + 2\underline{b}|\,.\,|\underline{a} - 2\underline{b}|$ හා ගණනය කරන්න. එනයින් $\underline{a} + 2\underline{b}$ හා $\underline{a} - 2\underline{b}$ දෛශික දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

93. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ $\underline{a}\,.\,\underline{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(a) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\underline{a}$ ත් $\underline{b}$ ත් අතර කෝණය සොයන්න.

(i) $\underline{a}\,.\,(\underline{a} - \underline{b}) = 0$ සහ $|\underline{b}| = 2|\underline{a}|$

(ii) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = (\underline{a} + \underline{b})$

(b) A, B, C, D යනු චතුශ්චලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න.

94. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ යනු $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 4$ සහ $|\underline{c}| = 5$ ලෙස පවතින දෛශික තුනකි. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ සහ $\underline{a} + \underline{b}$ ට ලම්බක වෙයි. $|\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}| = 5\sqrt{2}$ බව සාධනය කරන්න.

95. a හා b දෛශික දෙක කෙසේද යත් a, $(a - \mathrm{b})$ ට ලම්බ වෙයි. b ගේ විශාලත්වය a ගේ විශාලත්වය මෙන් තෙගුණයක් නම්, b, ka + b ට ලම්බ වන සේ k හි අගය තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් සොයන්න.

96. ABC යනු ඕනෑම ත්‍රිකෝණයකි. මෙහි AB මත D ලක්ෂ්‍යයක් ද BC මත E ලක්ෂ්‍යයක් ද පිහිටා ඇත්තේ AD : DB = 3 : 5 සහ BE : EC = 4 : 3 වන අන්දමිනි. AE සහ CD රේඛා G ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වේ. CG : GD අනුපාතය 2 : 1 බවත් AG : GE අනුපාතය 7 : 5 බවත් පෙන්වන්න.

97. PQR Δ යේ කේන්ද්‍රකය වන S හි පිහිටුම් දෛශිකය P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික වන $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$ මගින් සොයන්න. OACB සමාන්තරාස්‍රයේ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ද වේ යැයි සිතමු. AC පාදය මත D ත්, OB පාදය මත E ත් පිහිටා ඇත්තේ $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{3}$ හා $\dfrac{OE}{EB} = \dfrac{3}{5}$ වන පරිදිය. ADE Δ යේ හා BCD Δ යේ කේන්ද්‍රක පිළිවෙලින් F හා G නම්, F හා G ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න. FG රේඛාව, DE පාදය කපන ලක්ෂ්‍යය H නම් $\dfrac{DH}{HE}$ අනුපාතයත් BD පාදය කපන ලක්ෂ්‍යය I නම් $\dfrac{BI}{ID}$ අනුපාතයත් සොයන්න.

98. OAB යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ද වේ. තව ද C හා D ලක්ෂ්‍යය දෙකක් පිළිවෙලින් OA හා OB මත පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OC} = \lambda\underline{a}$ ද $\overrightarrow{OD} = \mu\underline{b}$ ද වන පරිදි වේ.
මෙහි $\lambda < 1$, $\mu > 1$ වේ. CD හා AB හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය P වේ. $\overrightarrow{OP} = (1 - \alpha)\,\underline{a} + \alpha\underline{b}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු අදිශයකි. $\overrightarrow{OP}$ සඳහා තවත් එවැනි ප්‍රකාශනයක්ද ලබාගෙන එනයින් P හි පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu - \lambda}\,\underline{a} + \dfrac{\mu(1 - \lambda)}{\mu - \lambda}\,\underline{b}$ බව පෙන්වන්න. OP රේඛාව AB රේඛාවට ලම්භක වේ නම් දෛශික තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 2$ බව පෙන්වන්න. CP : PD = 2 : 3 නම් $3\lambda + 2\mu = 5$ බව පෙන්වන්න. එනයින් λ හා μ හි අගය සොයන්න.

99. A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක O මූලයකට සාපේක්ෂව ගත් පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ. AB යා කරන රේඛාව C ලක්ෂ්‍යය මගින් AC : CB = 1 : k අනුපාතයට බෙදෙයි නම් $\overrightarrow{OC} = \dfrac{k\underline{a} + \underline{b}}{1 + k}$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{(\underline{a}+\underline{b})}{\lambda}$ හා $\overrightarrow{OE} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ ලෙස OAB තලය මත D හා E ලක්ෂ්‍යය දෙකක් පවතී. CD හා CE දෛශික දෙක λ , k , α , β හා $\underline{a}$, $\underline{b}$ ඇසුරින් සොයන්න. k = 3 බව දී ඇත්නම් ද C, D, E ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව දී ඇත්නම් ද $4(\alpha-\beta)+(3\beta-\alpha)\lambda-2=0$ බව පෙන්වන්න. $\alpha = \beta$ නම් $\alpha = \beta = \dfrac{1}{\lambda}$ බව පෙන්වා D හා E ලක්ෂ්‍යය සමපාත වන බව ද පෙන්වන්න.

99. O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂ ලෙස A, B, C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}+2\underline{j}$, $4\underline{i}+\underline{j}$ සහ $\lambda\underline{i}+\mu\underline{j}$ වෙයි. මෙහි $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ ට සුපුරුදු අර්ථ වෙයි. λ සහ μ අදිශ දෙකකි. A, B, C ඒක රේඛීය වේ නම් $\lambda + 3\mu = 7$ බව පෙන්වන්න.
D ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $-\underline{i} + 3\underline{j}$ වෙයි. DC සහ AB රේඛා එකිනෙකට ලම්බක වේ නම්, $3\lambda - \mu = -6$ බව පෙන්වන්න. එනයින් λ සහ μ හි අගයන් සොයන්න. E ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $\gamma\underline{i}$ වෙයි. AE සහ DE ලම්බක වන පරිදි γ සඳහා අගයක් පැවතිය නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

100. O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂ A සහ B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}-\underline{j}$, $2\underline{i}+\underline{j}$ වෙයි. මෙහි $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ සුපුරුදු අර්ථ ගනී. AB මත P ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ OP සහ AB ලම්බක වන අන්දමිනි.
$\overrightarrow{OP} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j}$ ලෙස දී තිබෙයි නම් $2\alpha - \beta = 3$ බව පෙන්වන්න. $\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{AB}$ සැලකීමෙන් α සහ β අතර තවත් සම්බන්ධතාවයක් ලබාගෙන එමගින් α සහ β සොයන්න. P සිට OB ට ඇඳි ලම්බකයේ අඩිය Q වෙයි. $\overrightarrow{OQ} = \lambda\underline{i} + \mu\underline{j}$ ලෙස දී ඇත්නම් λ සහ μ හි අගයයන් සොයා PQ දිග $\dfrac{12\sqrt{5}}{25}$ බව පෙන්වන්න.

101. O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂ ලෙස A සහ B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $4\underline{i}-\underline{j}$ සහ $-3\underline{i}+4\underline{j}$ වේ. AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C වෙයි. $\overrightarrow{OC}$ සොයන්න. $\overrightarrow{OA}$ සහ $\overrightarrow{OC}$ අතර අදිශ ගුණිතය සැලකීමෙන් AOC කෝණය සොයන්න.

102. $x\underline{i} + y\underline{j}$ යනු $3\underline{i} + 4\underline{j}$ ට 60^0 කෝණයෙන් ආනතව පිහිටන ඒකක දෛශිකයකි. x සහ y හි අගයන් සොයන්න.

103. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ යනු ඒකතල දෛශික තුනකි. $|\underline{a}+\underline{b}| = 1$ ද $|\underline{b}+\underline{c}| = 2$ ද $|\underline{c}+\underline{d}| = 3$ ද වෙයි.

$\underline{a}+\underline{b}$ යන්න $\underline{b}+\underline{c}$ ට ද $\underline{c}+\underline{a}$ ට ද ලම්බක වෙයි. $|\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}|$ හි අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ හෝ $\sqrt{\frac{13}{2}}$ වන බව සාධනය කරන්න.

104. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}$ හා $\underline{i}+\underline{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා OB ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = (1+\lambda)\,\underline{i} + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\underline{j}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි λ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. OB ට BC ලම්බ වන පරිදි වූ λ හි අගය සොයන්න.

105. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ යනු අභිශුන්‍ය නොවන දෛශික තුනකි. $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ සමාන්තර නොවෙයි. $\underline{a}+\underline{b}$ යන්න $\underline{c}$ ට සමාන්තර ද $\underline{a}-\underline{c}$ යන්න $\underline{b}$ ට සමාන්තර ද වෙයි. $\underline{a}+\underline{b}-\underline{c} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\underline{a}-\underline{b}$ යන්න $\underline{c}$ ට ලම්බක වෙයි නම්, $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ බව පෙන්වා $\underline{b}$ සහ $\underline{c}$ අතර කෝණය $\cos^{-1}\frac{|\underline{c}|}{2|\underline{b}|}$ බව පෙන්වන්න.

106. OPQR යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි PQ මත A ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ PA : AQ = 2 : 1 වන අන්දමිනි. QR මත B ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ QB : BR = 3 : 1 වන අන්දමිනි. O ට සාපේක්ෂව A සහ B හි පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ වෙයි. $\overrightarrow{OP} = \frac{6\underline{a}-4\underline{b}}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ ඇසුරින් $\overrightarrow{OQ}$ ද සොයන්න. AB සහ OQ රේඛා C ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වෙයි.

$\overrightarrow{OC} = \lambda\,\overrightarrow{OQ}$ ද $\overrightarrow{AC} = \mu\,\overrightarrow{AB}$ ද බව දී ඇත්නම්, $(1-\mu)\,\underline{a} + \mu\underline{b} = \frac{\lambda\,(9\underline{a}-4\underline{b})}{10}$ බව පෙන්වා, λ සහ μ සොයන්න. AC : CB සහ OC : CQ අනුපාත සොයන්න. $OC = \frac{6\underline{a}+4\underline{b}}{13}$ බව ද පෙන්වන්න.

පසුගිය විභාග ගැටළු

107. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a , b වෙයි. $\lambda : \mu$ අනුපාතයෙන් AB බෙදෙන P නම් ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $\dfrac{\mu a + \lambda b}{\lambda + \mu}$ බව පෙන්වන්න. O යනු ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AO, BO, CO රේඛාවලට BC, CA, AB සම්මුඛ පාද L, M, N ලක්ෂ්‍යවලදී හමුවන්නේ $\dfrac{BL}{LC} = \lambda,\ \dfrac{CM}{MA}\ \mu,\ \dfrac{AN}{NB} = \nu$ වන පරිදිය. දෛශික මූල O ලෙස ගෙන සමමිතිය භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\lambda\mu\nu = 1$ බව පෙන්වන්න. ***[1990]***

108. a හා b යනු සමාන්තර නොවන්නා වූත් ශූන්‍ය නොවන්නා වූත් දෛශික දෙකකි. $\alpha a + \beta b = 0$ නම් මෙවිට $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න. A හා B යනු දී තිබෙන O මූලයට සාපේක්ෂව a හා b පිහිටුම් දෛශික සහිතව AB රේඛාව මත නොවන්නා වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AOB හා OAB කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක R හිදී හමුවෙයි. $a = |a|$ ද, $b = |b|$ ද $c = |\overrightarrow{AB}|$ ද ලෙස දී තිබෙයි. $\overrightarrow{OR} = \lambda\left(\dfrac{a}{a}+\dfrac{b}{b}\right) = a + \mu\left\{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)(-a) + \dfrac{b}{c}\right\}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ හා μ අදිශ වේ. λ හා μ නිර්ණය කොට ඒ නයින්, OBA කෝණය BR මඟින් සමච්ඡේදනය කෙරෙන බව පෙන්වන්න. ***[1990]***

109. O, A, B, C යනු O, A, B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන පරිදි වූ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරකි. α හා β යනු නිශ්ශූන්‍ය සංඛ්‍යා විට $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = \alpha a + \beta b$ වේ.

(i) OA රේඛාව මත D නම් ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන ඇත්තේ $\overrightarrow{OD} = \gamma a$ වන පරිදිය. $\overrightarrow{DC} = \delta b$ වන අයුරින් γ හිත් δ හිත් අගයන් සොයන්න.

(ii) α, β, a හා b ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\alpha + \beta = 1$ නම්, A, B, C ලක්ෂ්‍යය ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න. තව ද A ත් B ත් අතර C පිහිටන බව දී ඇත්නම් α ඇසුරෙන් පමණක් AC:CB අනුපාත ප්‍රකාශ කර $0 < \alpha < 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) P, Q යනු $\overrightarrow{OP} = 2a$ ද $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}b$ ද වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AB හිත් PQ හිත් ඡේදන ලක්ෂ්‍යය R ය. a හා b ඇසුරෙන් $\overrightarrow{OR}$ ප්‍රකාශ කර AR : RB හා PR : RQ යන අනුපාත සොයන්න. ***[1991]***

110. a හා b නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ a.b අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(i) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී aත් b ත් අතර කෝණය සොයන්න.

(a) $a \cdot (a - b) = 0$ සහ $|b| = 2|a|$

(b) $|a| = |b| = |a + b|$

(ii) A, B, C, D යනු චතුස්තලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න. ***[1992]***

111. P, Q, R යනු ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනකි. ඒවායේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\overrightarrow{OP} = p$, $\overrightarrow{OQ} = q$, $\overrightarrow{OR} = r$ වෙයි. $r = \alpha p + (1 - \alpha) q$ වන පරිදි වූ α සංඛ්‍යාවක් පවතියි ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත P, Q, R ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{QA}$ හා $\overrightarrow{AR} = v\overrightarrow{RB}$ වන පරිදිය. මෙහි $\lambda\mu v \neq 0$. $\overrightarrow{CA} = a$ ද $\overrightarrow{CB} = b$ ද නම් මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස C ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න. ඒ නයින්, $\lambda\mu v = -1$ ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න. ***[1993]***

112. a, b හා c යනු ඕනෑම නිශ්ශුන්‍ය දෛශික තුනක් යැයි සිතමු. $\dfrac{a}{|a|}$. b අදිශ ගුණිතය ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. එනයින්, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ බව සාධනය කරන්න. OAB ත්‍රිකෝණයේ OA = a ද OB = b ද යැයි සිතමු. OA > OB යැයි සිතමු. L හා M යනු පිළිවෙලින්, $OL = l = \lambda a + (1 - \lambda)\, b$ ද $OM = m = \mu a + (1 - \mu)\, b$ ද යන පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යයයි. OL හා OM රේඛා මගින් පිළිවෙලින් අභ්‍යන්තර ලෙසත් බාහිර ලෙසත් AOB කෝණය සමච්ඡේදනය වන පරිදි λ හි හා μ හි අගය අදිශ ගුණිතය උපයෝගී කරගෙන $a = |a|$ හා $b = |b|$ ඇසුරෙන් නිර්ණය කරන්න.

(i) $\dfrac{AL}{LB} = -\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{OA}{OB}$ බවත්, (ii) $\overrightarrow{LM} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}(b - a)$ බවත් අපෝහනය කරන්න. ***[1995]***

113. a හා b නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකක a, b අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.
පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී a හා b අතර කෝණය සොයන්න.

(i) $a.(a + 2b) = 0$ සහ $|b| = |a|$ (ii) $|a + b| = |a - b|$ ***[1996]***

114. $-2\vec{p} + 5\vec{q}$, $7\vec{p} - \vec{q}$ හා $\vec{p} + 3\vec{q}$ යනු අචල O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙලින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යය තුනක පිහිටුම් දෛශික යයි ගනිමු. මෙහි $\vec{p}, \vec{q}$ යනු සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකක් වෙයි. A, B හා C ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා C ලක්ෂ්‍යය AB බෙදන අනුපාතය සොයන්න. ***[2011]***

115. $\vec{a}$ හා $\vec{b}$ දෛශික දෙකක් තිත් ගුණිතය වන $\vec{a}\,,\vec{b}$ අර්ථ දක්වන්න. $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ හා $\vec{d}$ ඕනෑම දෛශික හතරක් සඳහා $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{d}+\vec{b}.\vec{d}$ යයි උපකල්පනය කරමින් $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$ බව පෙන්වන්න. $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$ නම් $\vec{a}.\vec{b} = 0$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමාන නම් එය සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න. ***[2011]***

116. $a = i + 6\sqrt{3}\mathrm{j}$ වේ. මෙහි i හා j ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත. b යනු විශාලත්වය $\sqrt{3}$ සහිත දෛශිකයකි. a හා b දෛශික අතර කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ නම්, b යන්න $xi + \mathrm{y}\mathrm{j}$ ආකාරයෙන් සොයන්න. මෙහි $x\ (< 0)$ හා y යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. ***[2012]***

117. A හා B යනු O ලක්ෂ්‍යයක් සමඟ ඒකරේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a හා b යැයි ගනිමු. D යනු BD = 2DA වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම්, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\dfrac{1}{3}(2a + \mathrm{b})$ බව පෙන්වන්න. $\overrightarrow{BC} = \mathrm{k}a\ (\mathrm{k} > 1)$ හා O, D හා C ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය නම්, k හි අගය හා OD:DC අනුපාතය සොයන්න. a හා b ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. තව ද AC ට සමාන්තරව O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාව E හි දී AB හමුවේ නම්, 6DE = AB බව පෙන්වන්න. ***[2012]***

118. සුපුරුදු අංකනයෙන් O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් i හා $i + \mathrm{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු A හරහා OB ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = (1 + \lambda)\,i + 2\mathrm{j}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. OB ට BC ලම්බ වන පරිදි වූ λ හි අගය සොයන්න. ***[2013]***

119. OABC යනු චතුරශ්‍රයක් යැයි ද D හා E යනු පිළිවෙලින් OB හා AB විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. තව ද DE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a, b හා c යැයි ගනිමින් $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{4}(a + \mathrm{b} + \mathrm{c})$ බව පෙන්වන්න. P හා Q යනු පිළිවෙලින් OA හා BC පැතිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. P, F හා Q ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා PF : FQ අනුපාතය සොයන්න. ***[2013]***

120. ABCD යනු $\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපීසියමක් යැයි ගනිමු. තවද $\overrightarrow{AB} = \mathrm{p}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathrm{q}$ යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. AE හා ED වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F මගින් $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ යන්න සපුරාලයි. මෙහි λ (0 < λ < 1) නියතයකි. $\overrightarrow{AE} = \dfrac{5}{6}\mathrm{p} + \dfrac{1}{3}\mathrm{q}$ බව හා $\overrightarrow{AE} = (1 - \lambda)\,\mathrm{p} + \pi\mathrm{q}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් λ හි අගය සොයන්න. ***[2014]***

121. සුපුරුදු අංකනයෙන් $i + 2j$ හා $3i + 3j$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු OABC සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = 2i + j$ බව පෙන්වන්න. $A\hat{O}C = \theta$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ සැලකීමෙන් $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න. ***[2014]***

122. සුපුරුදු අංකනයෙන් O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\lambda i + \mu j$ හා $\lambda i - \mu j$ වේ. මෙහි λ හා μ යනු $0 < \lambda < \mu$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $A\hat{O}B$ සෘජුකෝණයක් බව පෙන්වන්න. AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකයේ විශාලත්වය 2 නම් හා එය i ඒකක දෛශිකය සමග $\dfrac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදයි නම්, λ හා μ හි අගයන් සොයන්න. ***[2015]***

123. සුපුරුදු අංකනයෙන් $a = 3i + 4j$, $b = 4i + 3j$ හා $c = ai + (1 - \alpha)j$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\alpha \in r$

(i) $|a|$ හා $|\underline{b}|$,

(ii) α ඇසුරෙන් $a.c$ හා $b.c$ සොයන්න.

a හා c අතර කෝණය b හා c අතර කෝණයට සමාන නම්, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

[2016]

124. O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a හා b වේ. මෙහි O, A හා B ඒක රේඛීය නොවේ. C යනු $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{AD}$ ප්‍රකාශ කර, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ බව පෙන්වන්න. P හා Q යනු පිළිවෙලින් AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ හා $OQ = (1 - \lambda)\,OD$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ බව පෙන්වන්න. ***[2016]***

125. A හා B සමග ඒක රේඛීය නොවන O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a හා b වේ. O අනුබද්ධයෙන් C ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $c = (1 - \lambda)\,a + \lambda b$ යැයි ගනිමු. මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ.
$\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ දෛශික a , b හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. ඒනයින්, C ලක්ෂ්‍යය AB රේඛා ඛණ්ඩය මත පිහිටන බවත් $AC : CB = \lambda : (1 - \lambda)$ බවත් පෙන්වන්න.
දැන්, OC රේඛාව AOB කෝණය සමච්ඡේදනය කරන්නේ යැයි සිතමු.
$|b|(a \,.\, c) = |a|(b \,.\, c)$ බව පෙන්වා ඒනයින් λ සොයන්න. ***[2017]***

126. OAB ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද E යනු OD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. F ලක්ෂ්‍යය OA මත පිහිටා ඇත්තේ OF : FA = 1 : 2 වන පරිදි ය. O අනුබද්ධයෙන් A හා B හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a හා b වේ. $\overrightarrow{BE}$ හා $\overrightarrow{BF}$ දෛශික a හා b ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

B, E හා F ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කර, BE : EF අනුපාතය සොයන්න.

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$ අදිශ ගුණිතය $|\underline{a}|$ හා $|\underline{b}|$ ඇසුරෙන් සොයා, $|\underline{a}| = 3|\underline{b}|$ නම්, $\overrightarrow{BF}$ යන්න $\overrightarrow{DF}$ ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න. ***[2018]***