WWW.ALEVELAPI.COM

අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(නව නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදී යාම

I පත්‍රය

A කොටස : 10 × 25 = 250

B කොටස : 05 × 150 = 750

එකතුව = 1000 / 10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, L.H.S. $= 2 \times 1 - 1 = 1$ හා R.H.S. $= 1^2 = 1$. (5)

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

එනම් $\sum_{r=1}^{p}(2r-1) = p^2$. (5)

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1}(2r-1) = \sum_{r=1}^{p}(2r-1) + \big(2(p+1)-1\big)$ (5)

$= p^2 + (2p+1)$

$= (p+1)^2$. (5)

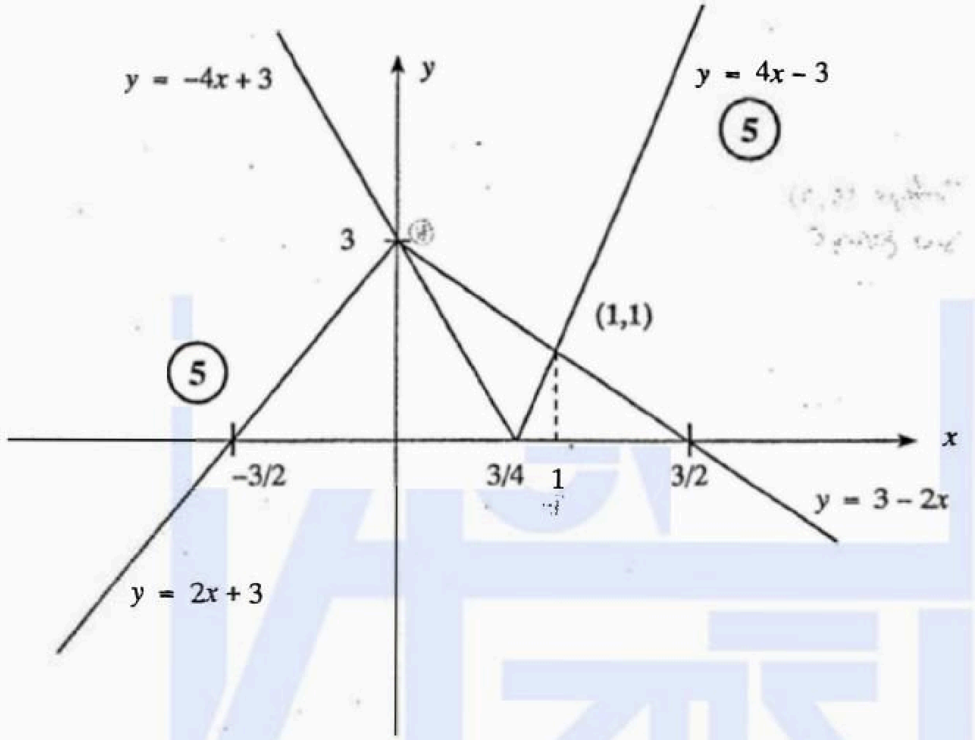
ඒ නයින්, $n = p$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලුම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

2. එක ම රූප සටහනක $y=|4x-3|$ හා $y=3-2|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|2x-3|+|x|<3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



මෙම ප්‍රස්තාරයෙන්හි ඡේදන ලක්ෂවලදී

$$4x-3=3-2x \Rightarrow x=1 \quad (5)$$

$$-4x+3=3+2x \Rightarrow x=0$$

ප්‍රස්තාර මගින්,

$|4x-3| < 3-2|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$ වේ.

$\therefore \ |4x-3|+|2x|<3 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$

x යන්න $\frac{x}{2}$, මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

$|2x-3|+|x|<3 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<2.$ (5)

$\therefore \ |2x-3|+|x|<3$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන සියලු x අගයන්ගේ කුලකය

$\{x : 0<x<2\}$ වේ. (5)

25

Alevel ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

වෙනත් ක්‍රමයක්

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5).

x හි අගයන් සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්

$|2x-3| + |x| < 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$:

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 - x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

∴ මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොපවතී.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \le \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x \le \frac{3}{2}$ වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

$\Leftrightarrow x < 2$

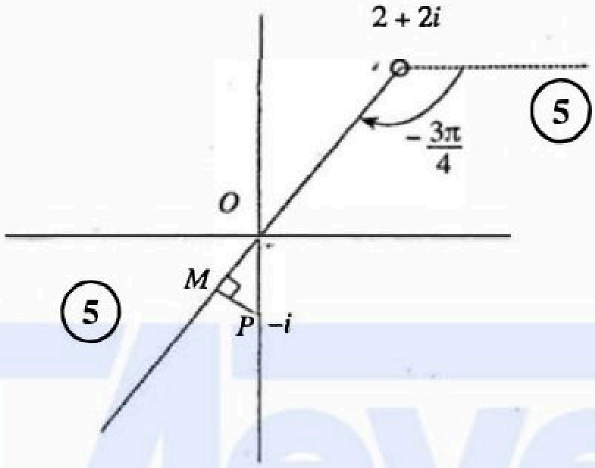
එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $\frac{3}{2} < x < 2$ වේ.

අවස්ථා 3 ම නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(10)
ඕනෑම අවස්ථා 2 ක් නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(5)

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x < 2$ වේ. (5) **25**

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-2-2i)=-\dfrac{3\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(z-2-2i)=-\dfrac{3\pi}{4}$ වන පරිදි $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$

$= |z+i|$

$= |z-(-i)|$ (5)

ඒ නයින්, $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය PM වේ. (5)

දැන්, $\text{PM} = 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

4. $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකය 35 බව පෙන්වන්න.

ඉහත ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදයක් නොපවතින බවත් පෙන්වන්න.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,(x^3)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\, x^{5r-14}$$

x^6 : $5r-14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ (5)

$\therefore x^6$ හි සංගුණකය $= {}^7C_4 = 35$ (5)

ඉහත ප්‍රසාරණයට x, වලින් ස්වායත්ත පදයක් තිබීම සඳහා $5r-14 = 0$ විය යුතුය. (5)

$r \in \mathbb{Z}^+$ බැවින් මෙය සිදුවිය නොහැක. (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

5. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \dfrac{1}{2\pi}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x-3 \to 0} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x-3 \to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$$

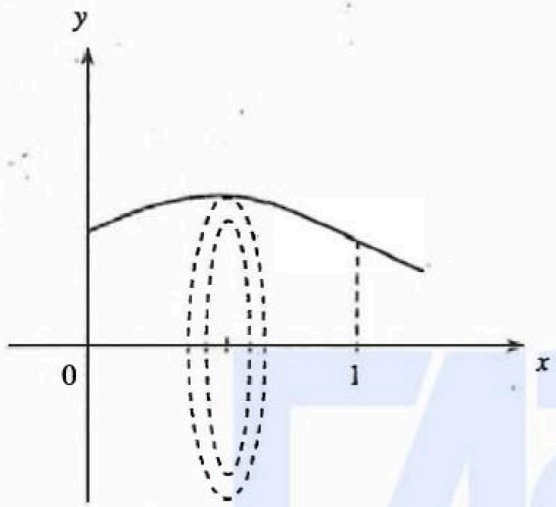
(5)

$$= \frac{1}{2\pi} \quad (5)$$

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

6. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x = 0$, $x = 1$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x - අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(\pi + \ln 4)$ බව පෙන්වන්න.



ජනනය වූ පරිමාව $= \displaystyle\int_0^1 \pi \left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)^2 dx$ (5)

$= \pi \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx \right)$ (5)

$= \pi \left(\dfrac{1}{2} \ln (x^2+1) \Big|_0^1 + \tan^{-1} x \Big|_0^1 \right)$ (5) + (5)

$= \pi \left(\dfrac{1}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi}{4} \right)$

$= \dfrac{\pi}{4} \left(\ln 4 + \pi \right)$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

7. C යනු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = at^2$ සහ $y = 2at$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන පරාවලය යැයි ගනිමු; මෙහි $a \neq 0$ වේ. C පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $y + tx = 2at + at^3$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
C පරාවලය මත $P \equiv (4a, 4a)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවට එම පරාවලය නැවත $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වේ. $T = -3$ බව පෙන්වන්න.

(*)

$x = at^2$, $y = 2at$

$\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$t \neq 0$ සඳහා $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t}$ (5)

$\therefore$ අභිලම්බ රේඛාවේ බෑවුම $= -t$

$(at^2, 2at)$ හිදී අභිලම්බයේ සමීකරණය

$y - 2at = -t\,(x - at^2)$ වේ.

$y + tx = 2at + at^3$ (5) (මෙය $t = 0$ සඳහා වලංගු වේ.)

$P \equiv (4a, 4a)$ on $C \Rightarrow t = 2$.

P හිදී අභිලම්බ රේඛාව : $y + 2x = 4a + 8a = 12a$ (5)

එය C හිදී $(aT^2, 2aT)$ හමු වන බැවින්

$2aT + 2aT^2 = 12a.$ (5)

$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T-2)(T+3) = 0$

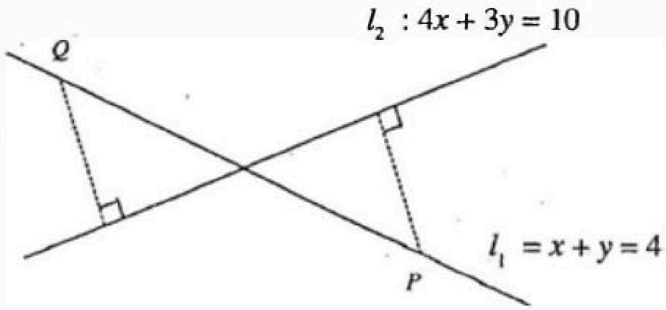
$\Leftrightarrow T = 2$ හෝ $T = -3$

$\therefore T = -3$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y = 4$ හා $4x + 3y = 10$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.
P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1 ක් වන පරිදි ය. P හි හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_1 මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$(t, 4 - t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැක; මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ යැයි ගනිමු.

$$P \text{ සිට } l_2 \text{ ට ලම්බ දුර } = \frac{|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$ (5)

$\therefore |t_1 + 2| = 5$

$\therefore t_1 = -7$ හෝ $t_1 = 3$ (5)

P හා Q හි ඛණ්ඩාංක

$(-7, 11)$ හා $(3, 1)$ වේ. (5) + (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

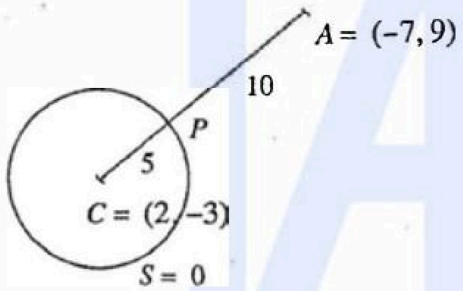
9. $A\equiv(-7,9)$ ලක්ෂ්‍යය $S\equiv x^2+y^2-4x+6y-12=0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. $S=0$ වෘත්තය මත වූ, A ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නතම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S=0$ හි කේන්ද්‍රය C කේන්ද්‍රය $(2,-3)$ වේ. (5)

$S=0$ හි R අගය $\sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} =$ වේ. (5)

$CA^2 = 9^2+12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5.$ (5)

$\therefore$ A ලක්ෂ්‍යය දී ඇති වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටයි.



$S=0$ වෘත්තයට ආසන්නතම A ලක්ෂ්‍යය

CA ට $S=0$ හමුවන P ලක්ෂ්‍ය වේ.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ (5)

$$\therefore\ P \equiv \left(\frac{2\times 2+1(-7)}{3},\ \frac{2(-3)+1\times 9}{3}\right)$$

එනම් $P \equiv (-1,\ 1)$ (5)

25

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා $t = \tan\frac{\theta}{2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad ; \theta \neq (2n+1)\pi \text{ සඳහා} \quad (5)$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(5)

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1+t^2) = 2(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \quad (5)$$

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3} \quad (5) \quad \left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$$

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

11. (a) $p \in \mathbb{R}$ හා $0 < p \leq 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 + 2x + p = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු මෙම සමීකරණයෙහි මූල යැයි ගනිමු. α හා β දෙකම තාත්වික බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{p^2}{p^2 + p + 2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{\alpha}{\alpha - 1}$ හා $\frac{\beta}{\beta - 1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(p^2 + p + 2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, මෙම මූල දෙකම ධන වන බවත් පෙන්වන්න.

(b) c හා d යනු නිශ්ශූන්‍ය තාත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ද $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ යැයි ද ගනිමු. $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බවත්, $(x - d)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය cd බවත් දී ඇත. c හා d හි අගයන් සොයන්න. c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා, $(x + 2)^2$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් යැයි සිතමු.

$x = 1$, $p^2 + 2 + p = 0$ ලැබේ. (5)

නමුත් $p > 0 \Rightarrow p^2 + 2 + p > 0$, බැවින් මෙය සිදු විය නොහැක. (5)

$\therefore$ $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් නොවේ. **10**

විවේචකය $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ (10)

$= 4(1 - p^3)$

≥ 0 ($\because$ $0 < p \leq 1$) (5)

$\therefore$ α හා β දෙකම තාත්වික වේ. (5) **20**

$\alpha + \beta = -\frac{2}{p^2}$ හා $\alpha\beta = \frac{1}{p}$ (5) + (5)

දැන්,

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1)}$$ (5)

$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2}.$$ (5) **20**

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

දැන්

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \quad (5)$$

$$= \left(\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}\right) \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{p}{p^2+p+2} \quad (5)$$

ඒ නයින් අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2+p+2}x + \frac{p}{p^2+p+2} = 0$$ වේ. (10)

$$\Rightarrow \quad (p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0 \quad (5)$$

35

$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$ හා $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ යන දෙකම තාත්ත්වික වේ.

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} > 0, \ (\because p>0),$$

(5)

සහ $$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2+p+2} > 0, \ (\because p>0).$$

ඒ නයින් මෙම මූල දෙකම ධන වේ. (5)

10

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(*b*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ සාධකයක් බැවින් $f(c) = 0$ වේ. (5)

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ (5)

$\Rightarrow c^2(c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because c \neq 0)$ (5)

$f(x)$ යන්න $(x - d)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය cd බැවින්

$f(d) = cd.$ (5)

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$ (5)

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2(d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because d \neq 0)$ (5)

$\therefore \quad c = -2$ හා $d = -1.$ **30**

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ යන්න $(x+2)^2$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $Ax + B$ යැයි ගනිමු.

එවිට $f(x) \equiv (x+2)^2\, Q(x) + (Ax + B)$; මෙහි $Q(x)$ මාත්‍රය 1 වූ බහු පදයකි.

එබැවින්, $x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2\, Q(x) + Ax + B$ වේ. (5)

$x = -2$, ආදේශයෙන් $0 = -2A + B$ ලැබේ. (5)

අවකලනය කිරීමෙන්

$$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2\, Q'(x) + 2Q(x)(x+2) + A$$ වේ. (5)

නැවත $x = -2$ ආදේශයෙන්

$12 - 8 + 1 = A$ ලැබේ. (5)

$\therefore \ A = 5$ හා $B = 10$

ඒ නයින්, ශේෂය $5x + 10.$ (5) **25**

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

දීර්ඝ බෙදීම මගින්

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \; - \; 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 & \qquad\qquad 5x + 10.
\end{array}
$$

(15)

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 4x + 4)(x - 2) + (5x + 10)$$

$\therefore$ අවශ්‍ය ශේෂය $5x + 10$ වේ. (10)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

12. (*a*) P_1 හා P_2 යනු පිළිවෙළින් $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ මගින් දෙනු ලබන කුලක දෙක යැයි ගනිමු. $P_1 \cup P_2$ න් ගනු ලබන වෙනස් අකුරු 3 කින් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 කින් යුත්, අවයව 6 කින් සමන්විත මුරපදයක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. පහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් මුරපද ගණන සොයන්න:

(i) අවයව 6 ම P_1 න් පමණක් ම තෝරා ගනු ලැබේ,

(ii) අවයව 3 ක් P_1 න් ද P_2 න් අනෙක් අවයව 3 ද තෝරා ගනු ලැබේ.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(*a*) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 න් පමණක්ම වෙනස් අක්ෂර 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් අක්ෂර ගණන $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ (10)

ඒ නයින්, අවයව 6 ම P_1 ගෙන සෑදිය හැකි මුර පද ගණන $= {}^5C_3 \,.\, {}^4C_3 \,.\, 6!$ (5)

$= 28800$ (5)

20

(ii)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර				මුර පද ගණන	
P_1 න්		P_2 න්			
අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! = 28800$	(10)
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6! = 864000$	(10)
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6! = 864000$	(10)
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6! = 28800$	(10)

Alevel ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

ඒ නයින්, අවයව 3 ක් P_1 ත් ද, අනෙක් අවයව 3 ක් P_2 ත් ද තෝරාගෙන සෑදිය හැකි

වෙනස් මුර පද ගණන $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

(10)

50

(b) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

එවිට,

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$ (5)

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}.$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$ (5)

$$= 6U_r$$ (5)

15

එවිට,

$r = 1;\quad 6U_1 = V_1 - V_3,$

$r = 2;\quad 6U_2 = V_2 - V_4,$ (10)

$r = 3;\quad 6U_3 = V_3 - V_5,$

$r = 4;\quad 6U_4 = V_4 - V_6,$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$r = n-3;\quad 6U_{n-3} = V_{n-3} - V_{n-1}$

$r = n-2;\quad 6U_{n-2} = V_{n-2} - V_n$ (10)

$r = n-1;\quad 6U_{n-1} = V_{n-1} - V_{n+1}$

$r = n;\quad 6U_n = V_n - V_{n+2}$

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\therefore\ 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad \textcircled{10}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \textcircled{5}$$

40

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad \textcircled{5}$$

10

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}\right) \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad \textcircled{5}$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{5}{144}$ වේ. $\textcircled{5}$

15

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

13.(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ යනු $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි වූ න්‍යාස යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$a = 2$ හා $b = 1$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\mathbf{C}^{-1}$ නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$, හා

(ii) $z_2 \neq 0$ සඳහා $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

බව පෙන්වන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ බව සත්‍යාපනය කර,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$ යැයි ගනිමු.

$1 + \omega$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r(>0)$ හා $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ බව පෙන්වන්න.

www.alevelapi.com

(a) $AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

(5) (10)

$AB^T = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2a - 3 = b, \quad a - 4 = -2$ සහ $a = b + 1.$ (10)

$\Leftrightarrow a = 2$ සහ $b = 1$; (ඉහත ඕනෑම සමීකරණ දෙකකින්) මෙම අගයන් ඉතිරි සමීකරණය ද තෘප්ත කරයි. (5)

30

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$\therefore\ C^{-1}$ නොවති. (5)

10

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>.

C^{-1} පැවතීම සඳහා :

$p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$\Rightarrow p - 2r = 1,\ -p + 2r = 0,\ q - 2s = 0$ හා $-q + 2s = 1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore\ C^{-1}$ නොපවති. (5)

10

$$P = \frac{1}{2}(C - 2I) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$2P(Q + 3I) = P - I$

$\Leftrightarrow\ 2(Q + 3I) = I - P^{-1}$ (5)

$$\therefore\ 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

30

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(*b*) $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$\operatorname{Re} z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (5)

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ හා $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ යැයි ගනිමු.

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \frac{\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{1}$$

(5) (5)

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ (5)

20

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$

(5) (i) මගින් (5) (ii) මගින්

10

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1$$ (5)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$ (5)

10

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$\Rightarrow \quad 1 = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \text{ (i) (5) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \text{ (ii) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (\because |z_1 + z_2| > 0)$$

දැන් $z_1 + z_2 = 0$ එවිට

$$|z_1 + z_2| = 0 \leq |z_1| + |z_2|$$

ඒ නයින්, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **10**

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\, i)$

$$1 + \omega = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad (5)$$

මෙහි $r = \sqrt{3}$ හා $\theta = -\frac{\pi}{6}$. (5) **10**

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය මගින් $(1 + \omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[\cos(10\theta) + i\sin(10\theta)\right]$ (5)

$$1 + \overline{\omega} = \overline{1 + \omega} = \sqrt{3}\,(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{3}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow (1 + \overline{\omega})^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)\right] \quad (5)$$

$$\therefore (1 + \omega)^{10} + (1 + \overline{\omega})^{10} = (\sqrt{3})^{10} \times 2\cos(10\theta) \quad (5)$$

$$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 243. \quad (5)$$

20

Alevelapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

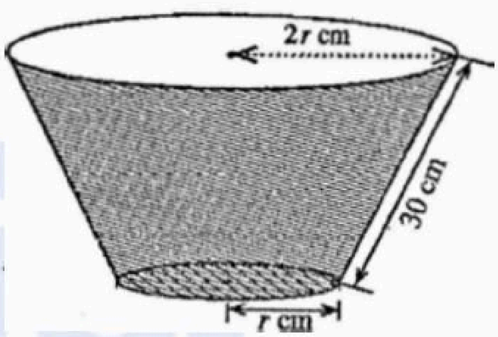
14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 3$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x)=-\dfrac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින්, $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{18(x^2-33)}{(x-3)^5}$ බව දී ඇත. $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල $x-$ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් පතුලක් සහිත සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක ආකාරයෙන් වූ බේසමක් පෙන්වයි. බේසමෙහි ඇල දිග 30 cm ක් ද උඩත් වෘත්තාකාර දාරයෙහි අරය පතුලෙහි අරය මෙන් දෙගුණයක් ද වේ. පතුලේ අරය r cm යැයි ගනිමු.



බේසමේ පරිමාව $V\,\text{cm}^3$ යන්න $0<r<30$ සඳහා

$V=\dfrac{7}{3}\pi r^2\sqrt{900-r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

බේසමේ පරිමාව උපරිම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(*a*) $x \neq 3$ සඳහා ; $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$

එවිට

$$f'(x) = 9\left[\frac{1}{(x-3)^3}(2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right] \quad (20)$$

$$= 9\left[\frac{2x^2-10x+12-3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right]$$

$$= \frac{-9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \text{ for } x \neq 3 \quad (5)$$

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \therefore\ y = 0.$ (5)

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$

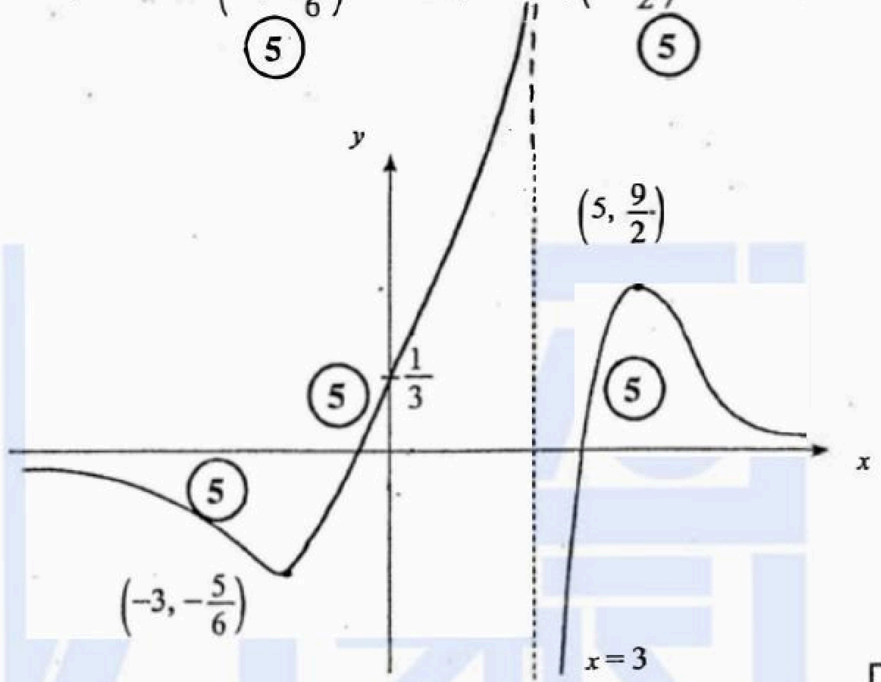
සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 3.$ (5)

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හිදී $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3$ හා $x = 5.$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(+)	(−)
	(5)	(5)	(5)	(5)
$f(x)$ is	↘	↗	↗	↘

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත : $\left(-3, -\frac{5}{6}\right)$ ස්ථානීය අවමයක් ද $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් ද වේ.
(5) (5)



60

$x \neq 3$ සඳහා ;

$$f''(x) = \frac{18\,(x - \sqrt{33}\,)\,(x + \sqrt{33})}{(x-3)^5}.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\ \sqrt{33}$. (5)

	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)	(+)
අවකලතාවය	යටි අවතල	උඩු අවතල	යටි අවතල	උඩු අවතල

(10)

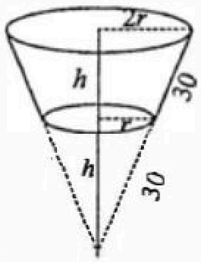
$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. :

$x = -\sqrt{33}$ හා $x = \sqrt{33}$ එම නතිවර්තන x– ඛණ්ඩාංක වේ. (5)

20

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(*b*)



$0 < r < 30$ සඳහා ;

$h = \sqrt{900 - r^2}$ (5)

පරිමාව V යන්න

$V = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් දෙනු ලැබේ. (5)

$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$. (5)

15

$0 < r < 30$ සඳහා

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi\left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2\frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right]$$ (5)

$$= \frac{7}{3}\pi\left[\frac{2r(900 - r^2) - r^3}{\sqrt{900 - r^2}}\right]$$

$$= 7\pi r\,\frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}} .$$ (5)

$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$ (5)

$0 < r < 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} > 0$ හා $r > 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} < 0$

(5) (5)

$r = 10\sqrt{6}$ විට V උපරිම වේ. (5)

30

---

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

15. (a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ අගයන්න.

(b) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int \ln(x-k)\,dx$ සොයන්න; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\int f(t)\,dt$ සොයන්න.

(c) a හා b නියත වන $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ හි අගය සොයන්න.

(a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා :

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ (5)

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (5)

එවිට $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ (5)

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ (5)

$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ (5)

$= \frac{\pi}{2} - 1$ (5)

40

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(*b*) $x \neq 1, 2$ සඳහා

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන් :

x^1 : $A + B = 0$ (5)

x^0 : $-2A - B = 1$ (5)

$A = -1$ හා $B = 1$ (5)

එවිට $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$ (10)

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(5) (5) (5)

40

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$= (\ln|x-2| - \ln|x-1|)\Big|_3^t$ (5)

$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ for $t > 2$. (5)

10

$\displaystyle\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx$ (5)

$= x\ln(x-k) - \displaystyle\int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx$ (5)

$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C$ (5)

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

15

$\displaystyle\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt$ (5)

$= (t-2)\ln(t-2) - t - \left[(t-1)\ln(t-1) - t\right] + t\ln 2 + D$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, මෙහි D යනු අභිමත නියතයකි.

(5)

10

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

10

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

25

---

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

16. $12x-5y-7=0$ හා $y=1$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

P යනු l මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda+1, 2\lambda+1)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

$B \equiv (6,0)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S+\lambda U=0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $S \equiv x^2+y^2-7x-y+6$ හා $U \equiv -3x-2y+18$ වේ.

$S=0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය බව **අපෝහනය** කරන්න.

$U=0$ යනු l ට ලම්බව, B හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න.

සියලු $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S+\lambda U=0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත මත වූ ද B වලින් ප්‍රභින්න වූ ද අචල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය, $S+\lambda U=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$12x-5y-7=0$ හා $y=1 \Rightarrow x=1, \quad y=1$

$\therefore A \equiv (1,1)$ (10)

10

සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{12x-5y-7}{13} = \pm \frac{(y-1)}{1}$$ (10)

$\Rightarrow 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7 = -13(y-1)$

$\Rightarrow 2x-3y+1 = 0$ or $3x+2y-5 = 0$ (5) + (5)

$y=1$ හා $2x-3y+1=0$ අතර කෝණය සුළු θ නම්

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right| = \frac{2}{3} < 1 \text{ වේ.}$$ (5)

$\therefore l: \ 2x-3y+1=0.$ (5)

30

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

l මත වූ (x, y) ලක්ෂ්‍යය සඳහා

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \lambda$$ (යැයි ගනිමු.) (5)

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \; y = 2\lambda + 1.$ (5)

10

$\therefore P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

දැන් $B \equiv (6, 0)$ හා $P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1)$

$\therefore$ BP විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x-6)\;(x - (3\lambda + 1)) + (y - 0)\;(y - (2\lambda + 1)) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ. (10)

එනම් $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ (5)

මෙය $S + \lambda U = 0$, ආකාරයෙන් වේ. මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

(5) (5)

25

$S = 0$ යන්න $\lambda = 0$ ට අනුරූප වේ. $\Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ (5)

$\therefore$ $S = 0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තය වේ. (5)

l හි බෑවුම $\frac{2}{3}$ නිසා l ට ලම්බව B හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය $3x + 2y + \mu = 0$ වේ;

මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. (10)

B ලක්ෂ්‍යය $3x + 2y + \mu = 0$ මත බැවින් $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $3x + 2y - 18 = 0$ වේ.

එනම් $U = -3x - 2y + 18 = 0.$

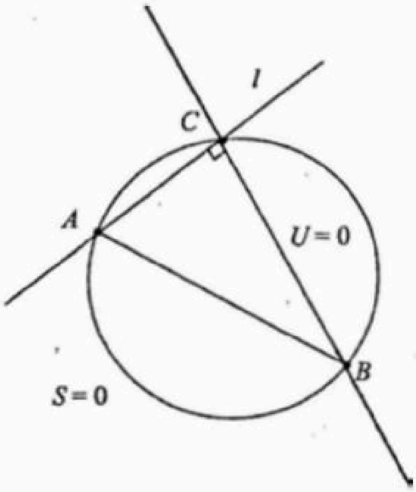
20

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S + \lambda U = 0$ යන්න $S = 0$ හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි. (10)

මෙම ලක්ෂ්‍ය වලින් එකක් B වන අතර අනෙක් C ලක්ෂ්‍යය l හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

(10)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.



$\therefore$ C හි ඛණ්ඩාංක

$$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$$

හා $l \equiv 2x - 3y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$ හා $y = 3$

$\therefore$ $C \equiv (4, 3)$. (5)

25

$S = 0$ හා $S + \lambda U = 0$ ප්‍රලම්බ වේ.

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$$

(5) (5) (5)

$\Leftrightarrow$ $13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 2.$

(5)

20

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \text{ හා}$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{C}B = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (*a*) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න. ඒ නයින්, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— (1) (5)

දැන් $\sin(A-B) = \sin(A+(-B))$ (5)

$= \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— (2) (5)

15

---

(1) + (2) $\Rightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ (5)

(1) − (2) $\Rightarrow \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ (5)

10

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin\theta = \sin 7\theta$ (5)

$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta + \theta) - \sin(6\theta - \theta) - \sin\theta = 0$ (5)

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin\theta > 0$

(5)

www.alevelapi.com

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

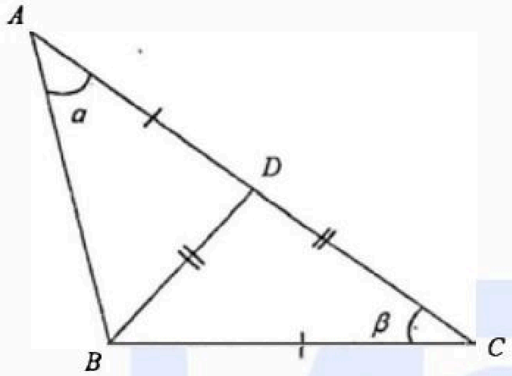
$$\Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} ;\ n \in \mathbb{Z}.$$ (5) + (5)

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} ;\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$ (5)

30

(*b*)



$C\hat{B}D = \beta,\ A\hat{D}B = 2\beta,$

හා $A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

සයින් නීතිය යෙදීමෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin(\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha + 2\beta)} \quad \text{——— (1)}$$ (5)

BDC ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad \text{——— (2)}$$ (5)

$\because BD = DC$ and $AD = BC$, (1) න් හා (2) න්

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta}$$ (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ (5)

40

$\alpha : \beta = 3 : 2$, නම්

$2\sin\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} = \sin\frac{7\alpha}{3}$ වේ. (5)

$\Rightarrow \quad 2\sin 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ (5)

$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{15\pi}{18}, \frac{21\pi}{18}$ (5)

$\because BC = AD < AC$, α සුළු කෝණයක් විය යුතුය.

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$ (5)

20

(*c*) $\quad 2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ යැයි ගනිමු. $x \neq \pm 1$ බව දනිමු.

එවිට $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cot\beta$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x+1}$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2x = 1 - x \quad (\because x \neq \pm 1)$

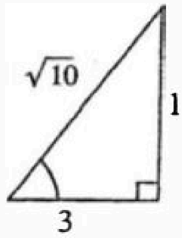
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$ (5)

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$ (5)

10

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

WWW.ALEVELAPI.COM

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

(නව නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදීයාම

II පත්‍රය

A කොටස : 10 × 25 = 250

B කොටස : 05 × 150 = 750

එකතුව = 1000 / 10

II පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

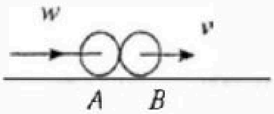
1. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A, B හා C අංශු තුනක් එම පිළිවෙළින්, සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක තබා ඇත. A අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන්නේ එය B අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටෙන පරිදි ය. A අංශුව සමග ගැටුන පසු, B අංශුව චලනය වී C අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. පළමු ගැටුමෙන් පසුව B හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

B හා C අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය ද e වේ. B සමග ගැටුමෙන් පසුව C හි ප්‍රවේගය ලියා දක්වන්න.

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

A හා B සඳහා (පළමු ගැටුමට) $\rightarrow$:

$$0 = mv + mw - mu \quad (5)$$

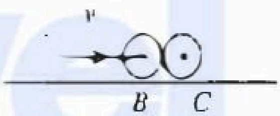


$$\Rightarrow v + w = u \text{ ——— (i)}$$

නිව්ටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

$$v - w = eu \text{ ——— (ii)} \quad (5)$$

$$\therefore \text{(i)} + \text{(ii)} \Rightarrow v = \frac{(1+e)}{2}u \quad (5)$$



$\therefore$ පළමු ගැටුමට පසුව B හි ප්‍රවේගය $= \frac{1}{2}(1+e)u$.

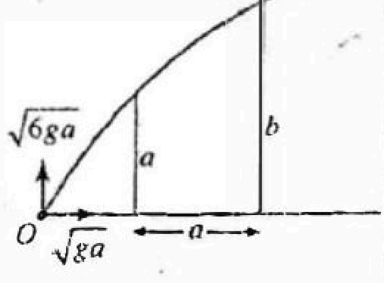
v මගින් u ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්, B සමග ගැටුමට පසුව C හි ප්‍රවේගය $= \frac{1}{2}(1+e)v$ (5)

$$= \frac{1}{4}(1+e)^2 u \quad (5)$$

25

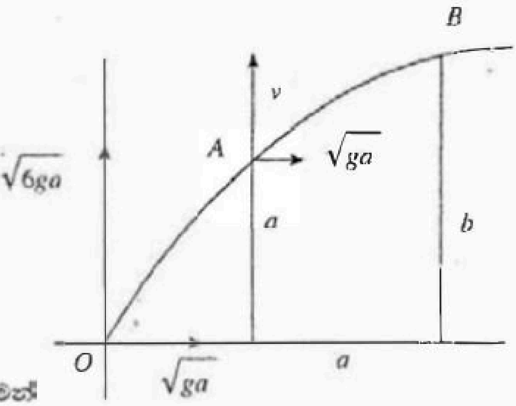
2. තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\sqrt{ga}$ හා $\sqrt{6ga}$ සහිත ප්‍රවේගයකින් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, එකිනෙකට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස a හා b වූ සිරස් තාප්ප දෙකකට යාන්තමින් ඉහළින් අංශුව යයි. උස a වූ තාප්පය පසු කරන විට අංශුවේ ප්‍රවේගයෙහි සිරස් සංරචකය $2\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

$b = \frac{5a}{2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.



උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

අංශුව, උස a වූ තාප්පය පසුකර යනවිට, එහි සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය v යැයි සිතමු.



O සිට A දක්වා, $\uparrow$ $v^2 = u^2 + 2as$: .

$v^2 = 6ga - 2g \cdot a = 4ga$ (5)

$\therefore v = 2\sqrt{ga}$ (5)

අමතර T කාලයකට පසුව එය දෙවන බිත්තිය පසුකර යයි නම්,

A සිට B දක්වා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ $\rightarrow$ හා $\uparrow$, යෙදීමෙන්

$a = \sqrt{ga} \cdot T.$ (5)

හා $b - a = 2\sqrt{ga} \cdot T - \frac{1}{2}gT^2$ (5)

T ඉවත් කිරීමෙන්, $b - a = 2\sqrt{ga} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{a}{g}$

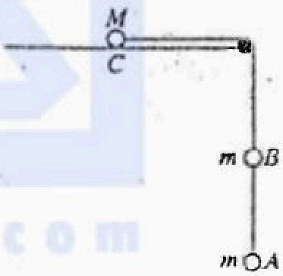
$\therefore b = a + 2a - \frac{a}{2}$

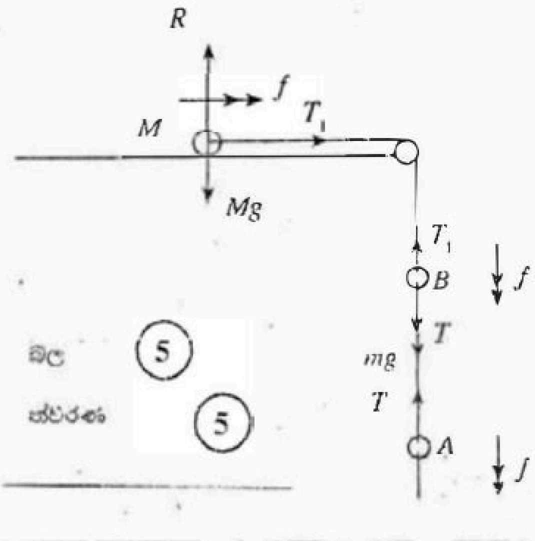
එනම්, $b = \frac{5a}{2}$ (5)

25

---

3. රූපයෙහි A, B හා C යනු ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m, m හා M වූ අංශු වේ. A හා B අංශු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. සුමට තිරස් මේසයක් මත වූ C අංශුව, මේසයේ දාරයට සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පියක් මතින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් B ට ඈඳා ඇත. අංශු හා තන්තු සියල්ලම එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු නොබුරුල්ව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. A හා B යා කරන තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

A සඳහා $\downarrow$ $mg - T = mf$ (5)

B සඳහා $\downarrow$ $T + mg - T_1 = mf$, (5)

C සඳහා $\rightarrow$ $T_1 = Mf$ (5)

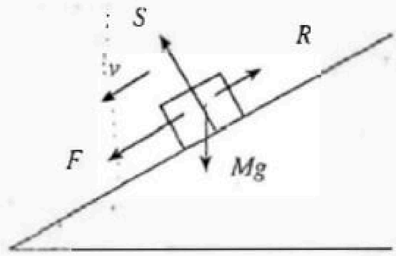
බල (5)

ත්වරණ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

4. ස්කන්ධය M kg හා P kW නියත ජවයකින් යුත් කාරයක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ පහළට චලනය වේ. එහි චලිතයට $R\,(> Mg\sin\alpha)$ N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එක්තරා මොහොතක දී කාරයේ ත්වරණය a ms^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී කාරයේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
මාර්ගය දිගේ පහළට කාරයට චලනය විය හැකි නියත වේගය $\dfrac{1000P}{R - Mg\sin\alpha}$ ms^{-1} බව අපෝහනය කරන්න.



කාරයෙහි වේගය v ms^{-1} වන විට,

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000\,P}{v}$ (5)

ත්වරණය a ms^{-2} වන මොහොතේ දී,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\swarrow \quad F + Mg\sin\alpha - R = Ma.$ (10)

$\Rightarrow \dfrac{1000\,P}{v} + Mg\sin\alpha - R = Ma$

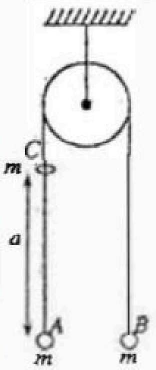
$\therefore \quad v = \dfrac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha + Ma}$ (5)

කාරය නියත වේගයෙන් චලනය වන විට $a = 0$ වන අතර නියත වේගයේ අගය

$v = \dfrac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha}$ (5)

25

5. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. A ට සිරස්ව a දුරක් ඉහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරින ලද ස්කන්ධය m ම වූ C කුඩා පබළුවක් ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වී A සමග ගැටී හා වේ. (රූපය බලන්න.) A හා C අතර ගැටුම සිදු වන මොහොතේ දී තන්තුවේ ආවේගය ද ඉහත ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු B ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය ද නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



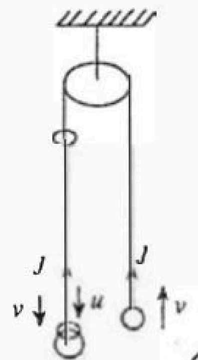
$v^2 = u^2 + 2as \downarrow$ යෙදීමෙන්,

a දුරක් වැටීමේදී C ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය $u = \sqrt{2ga}$ (5)

C හා A ගැටෙන මොහොතේදී තන්තුවේ ආවේගය J යැයිද,

ගැටුමට මොහොතකට පසුව B හි ප්‍රවේගය v යැයිද ගනිමු.

එවිට, $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්



(5) v සඳහා

B සඳහා $\uparrow \quad J = mv.$ (5)

A හා C සඳහා $\downarrow \quad -J = (m + m)\,v - mu.$ (10)

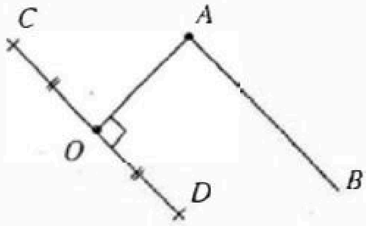
25

එනම් $-J = 2mv - m\sqrt{2ga}.$

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. $A\hat{O}C = A\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ හා $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ වන පරිදි වූ C හා D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

සටහන :



$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (5)

$\therefore AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$ යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ නිසා, $(2\mathbf{j} + \mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 0$

$\therefore y = -2x$ (5)

$OC = \frac{1}{3}AB$ නිසා, $\sqrt{x^2 + 4x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ (5)

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{9}$

මෙම සමීකරණ D හි ඛණ්ඩාංක සඳහා ද වලංගු වේ.

එම නිසා, $x = \pm\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (5) ; $\left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (5)

එම නිසා, C හා D හි පිහිටුම් දෛශික වන්නේ, $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ හා $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$ වේ.

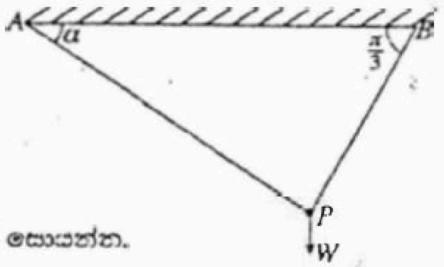
25

(4)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

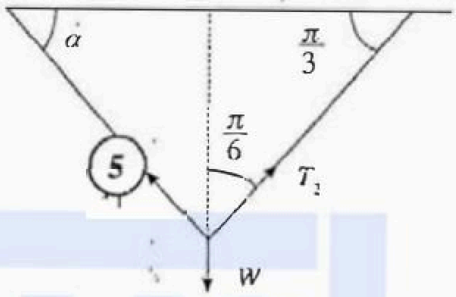
7. තිරස සමග පිළිවෙළින් α හා $\frac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන AP හා BP සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් තිරස් සිවිලිමකින් එල්ලා ඇති බර W වූ P අංශුවක්, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ පවතී. AP තන්තුවේ ආතතිය, W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, මෙම ආතතියේ අවම අගයත් එයට අනුරූප α හි අගයත් සොයන්න.



ලාමි ප්‍රමේයයෙන්,

$$\frac{T_1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{6}\right)} \quad (10)$$

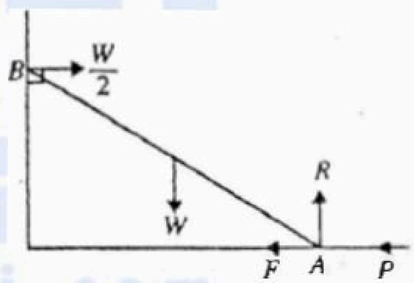


$$\therefore T_1 = \frac{W}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} \quad (5)$$

එම නිසා AP හි T_1 ආතතියේ අවම අගය $= \frac{W}{2}$ වන අතර, T_1 හි අවමයට අනුරූප α හි අගය $\alpha = \frac{\pi}{6}$ වේ.

(5) **25**

8. දිග $2a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද තබා ඇත. බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A කෙළවරේ දී බිත්තිය දෙසට යෙදූ විශාලත්වය P වන තිරස් බලයක් මගිනි. රූපයේ F හා R මගින් පිළිවෙළින් A හි දී ඝර්ෂණ බලය හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව දක්වා ඇත. B හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව, රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි $\frac{W}{2}$ ද දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{4}$ ද නම්, $\frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ බව පෙන්වන්න.



දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා

විභේදනයෙන් $\uparrow$ $R - W = 0.$ (5)

$\leftarrow$ $P + F - \frac{W}{2} = 0.$ (5)

$\therefore F = \frac{W}{2} - P$ (5)

$\because |F| \leq \mu R$

(5)

$\left|\frac{W}{2} - P\right| \leq \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} W \leq \frac{W}{2} - P \leq \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow \frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ හා $P(A' \cap B) = \frac{1}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A' \cap B')$ සොයන්න; මෙහි A' හා B' වලින් පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි දැක්වේ.

$$P(B) = P\big((A \cap B) \cup (A' \cap B)\big) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big)$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad (5)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \quad (5)$$

$$= 1 - [\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}]$$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A' \cap B') = \frac{3}{10} \quad (5)$$

25

10. එක එකක් 5 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට මාතයන් දෙකක් ඇති අතර ඉන් එකක් 3 වේ. ඒවායේ මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය යන දෙකම 3 ට සමාන වේ. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

මධ්‍යස්ථය = 3 හා ප්‍රභින්න මාත දෙකක් සහිතව පහට අඩු සංඛ්‍යා පහක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට සකස් කළ විට පහත දැක්වෙන ආකාර දෙකකි.

$a, a, 3, 3, 4$ (5)

- $b, 3, 3, 4, 4$ (5)

මධ්‍යන්‍යය 3 බැවින් ඒවායේ ඓක්‍යය 15 වේ.

එවිට $2a + 10 = 15$; $a = \frac{5}{2}$, # (5)

හෝ $b + 14 = 15$; $b = 1$. (5)

$\therefore$ සංඛ්‍යා පහ වන්නේ 1, 3, 3, 4, 4 (5)

25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

11. (a) P හා Q මෝටර් රථ දෙකක් සෘජු පාරක් දිගේ නියත ත්වරණ සහිතව එකම දිශාවකට චලනය වේ. කාලය $t = 0$ හි දී P හි ප්‍රවේගය $u \text{ m s}^{-1}$ ද Q හි ප්‍රවේගය $(u + 9) \text{ m s}^{-1}$ ද වේ. P හි නියත ත්වරණය $f \text{ m s}^{-2}$ ද, Q හි නියත ත්වරණය $\left(f + \frac{1}{10}\right) \text{ m s}^{-2}$ ද වේ.

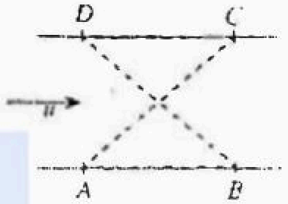
(i) $t \geq 0$ සඳහා P හා Q හි චලිතවලට, එකම රූපයක හා

(ii) $t \geq 0$ සඳහා P ට සාපේක්ෂව Q හි චලිතයට, වෙනම රූපයක,

ප්‍රවේග-කාල වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න.

කාලය $t = 0$ හි දී P මෝටර් රථය Q මෝටර් රථයට වඩා මීටර 200 ක් ඉදිරියෙන් සිටි බව තවදුරටත් දී ඇත. P පසුකර යෑමට Q මගින් ගනු ලබන කාලය සොයන්න.

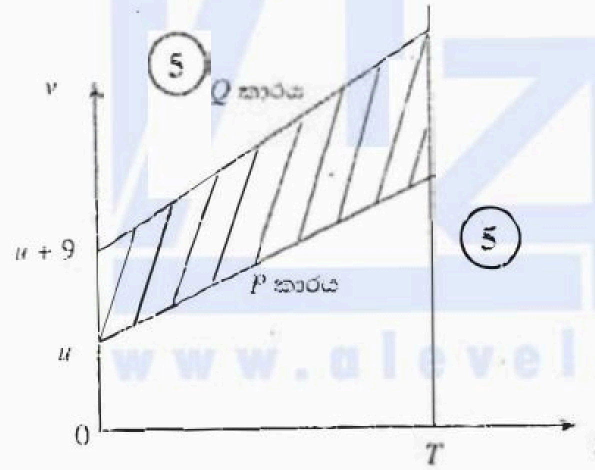
(b) සමාන්තර සෘජු ඉවුරු සහිත පළල a වූ ගඟක් u ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගලයි. රූපයෙහි, A, B, C හා D යනු ඉවුරු මත වූ ලක්ෂ්‍ය සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වේ. ජලයට සාපේක්ෂව නියත $v (> u)$ වේගයෙන් චලනය වන B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකක් එකම මොහොතක A සිට ඒවායේ ගමන් ආරම්භ කරයි. B_1 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AC}$ දිගේ C වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{CD}$ දිශාවට ගඟ දිගේ ඉහළට D වෙත යයි. B_2 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට ගඟ දිගේ පහළට B වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{BD}$ දිගේ D වෙත යයි. එකම රූපයක, B_1 හි A සිට C දක්වා ද B_2 හි B සිට D දක්වා ද චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



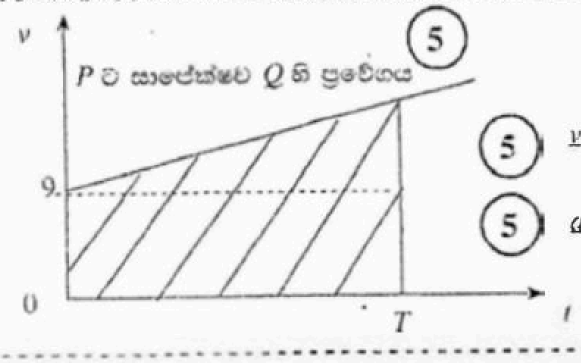
ඒ නයින්, A සිට C දක්වා චලිතයේ දී B_1 බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right)$ බව පෙන්වා B සිට D දක්වා චලිතයේ දී B_2 බෝට්ටුවේ වේගය සොයන්න.

B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතක දී D වෙත ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(a)



10



(5) $v(Q, P) = (u + 9) - u = 9.$

(5) $a(Q, P) = \left(f + \frac{1}{10}\right) - f = \frac{1}{10}.$

15

$t = 0$ වේලාවේ දී, P කාරයට 200m ඉදිරියෙන් Q ඇත.

අඳුරු කළ කොටසෙහි වර්ගඵලය (ප්‍රස්තාර දෙකෙන් ඕනෑම එකක) = 200. (5)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

P පසුකර යෑමට ගන්නා කාලය T යැයි ගනිමු.

$\therefore \frac{1}{2} T \left(9 + 9 + \frac{1}{10} T\right) = 200$ (5) (5)

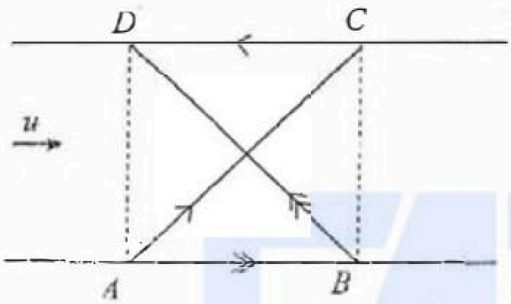
$\Rightarrow T^2 + 180T - 4000 = 0$ (5)

$\Rightarrow (T - 20)(T + 200) = 0$

$T > 0$ බැවින්, $T = 20$. (5)

25

(b)



සටහන

$V(B_1, E) = \nearrow \frac{\pi}{4}$, (5) $V(B_2, E) = \frac{\pi}{4} \nwarrow$ (5)

$V(W, E) = \rightarrow u$, (5)

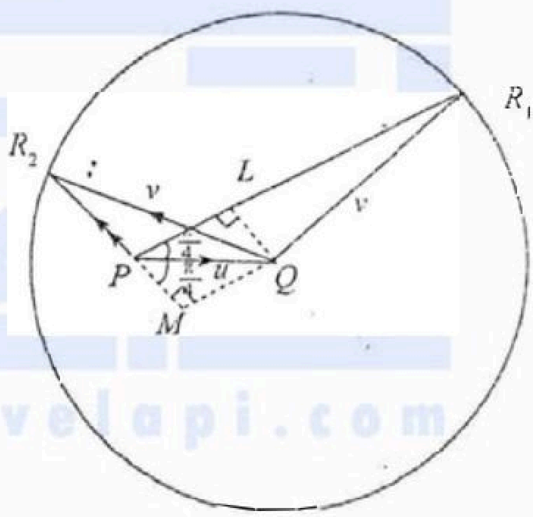
$V(B_i, W) = v$, for $i = 1, 2$.

$V(B_i, E) = V(B_i, W) + V(W, E)$ (10)

$= V(W, E) + V(B_i, W)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$ $i = 1, 2$

$= \overrightarrow{PR_i}$, $i = 1, 2$



(15) + (15)

55

PQR_1 ත්‍රිකෝණයේ,

$PR_1 = PL + LR_1$

$= \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right]$ (10)

(8)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

A සිට C දක්වා B_1 හි වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}+u\right)$

PQR_2 ත්‍රිකෝණයේ,

$$PR_2 = MR_2 - MP = \sqrt{v^2-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}-u\right) \quad (10)$$

20

A සිට C දක්වා $\overrightarrow{AC}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට C සිට D දක්වා $\overrightarrow{CD}$ දිගේ චලනය වීමට B_1 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_1 = \frac{a\sqrt{2}}{PR_1} + \frac{a}{v-u} \quad (5)$$

A සිට B දක්වා $\overrightarrow{AB}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට B සිට D දක්වා $\overrightarrow{BD}$ දිගේ චලනය වීමට B_2 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad (5)$$

$$T_2 - T_1 = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{PR_2} - \frac{1}{PR_1}\right) - a\left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u}\right) \quad (5)$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{PR_1 - PR_2}{PR_1 \cdot PR_2}\right) - \frac{2au}{v^2-u^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,u}{\frac{1}{2}\left[(2v^2-u^2)-u^2\right]} - \frac{2au}{v^2-u^2} \quad (5)$$

$$= \frac{2au}{v^2-u^2} - \frac{2au}{v^2-u^2}$$

$$= 0. \quad (5)$$

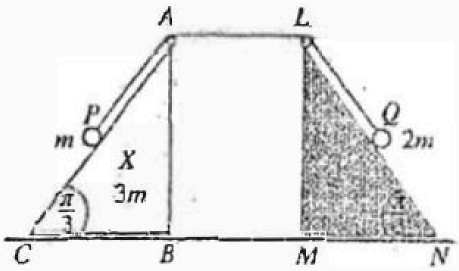
එම නිසා, B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතේ D වෙත ළඟා වේ.

25

(ඉ)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

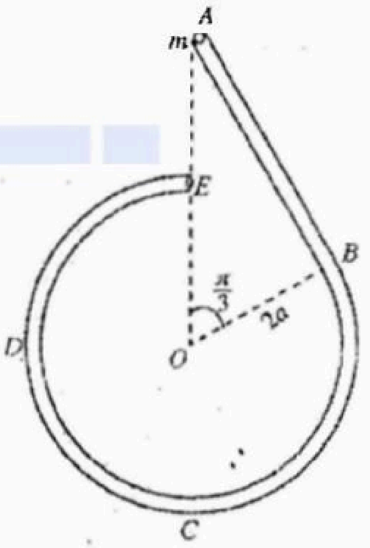
12. (a) රූපයෙහි ABC හා LMN ත්‍රිකෝණ, $A\hat{C}B = L\hat{N}M = \frac{\pi}{3}$ හා $A\hat{B}C = L\hat{M}N = \frac{\pi}{2}$ වූ BC හා MN අඩංගු මුහුණත් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද පිළිවෙළින් X හා Y සර්වසම සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. ස්කන්ධය $3m$ වූ X කුඤ්ඤය ගෙබිම මත චලනය වීමට නිදහස් වන අතර Y කුඤ්ඤය අචලව තබා ඇත. AC හා LN රේඛා අදාළ මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. A හා L හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවර ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පරිදි ආරම්භක පිහිටීමේ දී, තන්තුව තොබුරුල්ව හා $AP = AL = LQ = a$ වන ලෙස P හා Q අංශු පිළිවෙළින් AC හා LN මත අල්වා තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Y වෙත යාමට X ගනු ලබන කාලය, a හා g ඇසුරෙන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



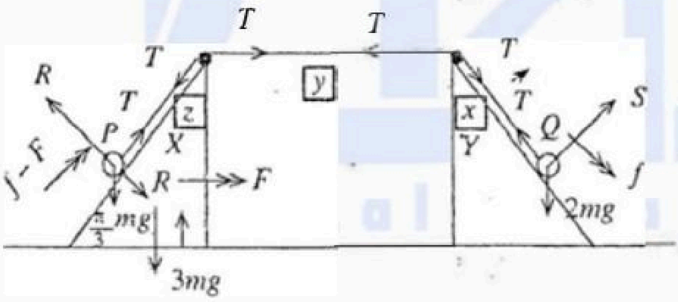
(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සුමට සිහින් $ABCDE$ බටයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $2\sqrt{3}a$ වූ AB කොටස සෘජු වන අතර එය B හි දී අරය $2a$ වූ $BCDE$ වෘත්තාකාර කොටසට ස්පර්ශක වේ. A හා E අන්ත O කේන්ද්‍රයට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටයි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි දී බටය තුළ තබා නිශ්චලතාවයේ සිට සීරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. $\overrightarrow{OA}$ සමග $\theta \left(\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P අංශුවේ වේගය, v යන්න, $v^2 = 4ga(2-\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේ දී P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

P අංශුව A සිට B දක්වා චලිතයේ දී එය මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

P අංශුව B පසු කරන විට P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ක්ෂණිකව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.



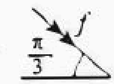
(a)



බල (15)

ත්වරණ (20)

Acc of (X, E) = $\rightarrow\!\!\!\rightarrow F$

Acc of (Q, E) =  , (∵ Y අචල නිසා)

Acc of (P, X) = $f - F$ ↗

$\therefore$ Acc of (P, E) = $\rightarrow\!\!\!\rightarrow F$ +

$x + y + z$ නියතයකි.

$\Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$

$\Rightarrow -\ddot{z} = \ddot{x} - (-\ddot{y})$

$= f - F$

$\mathrm{F} = m\mathrm{a}$ යෙදීමෙන්

P අංශුවට X හි චලිතය සඳහා ;

$\rightarrow T \quad = 3\,m\,F + m\,(F + \frac{f - F}{2})$ (15)

(10)

A/L ඇපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

P හි චලිතය සඳහා ;

(↗ $\frac{\pi}{3}$) $T - mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m(f - F + \frac{F}{2})$ (10)

Q හි චලිතය සඳහා ;

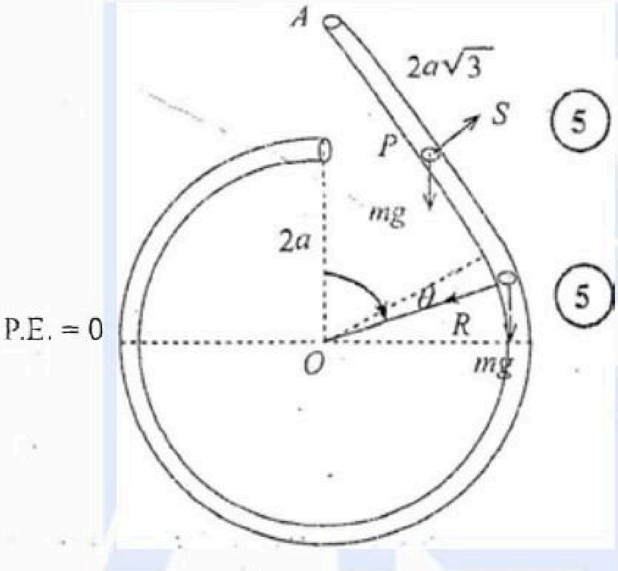
(↘ $\frac{\pi}{3}$) $2mg\frac{\sqrt{3}}{2} - T = 2mf t$ (10)

X ට Y වෙත ළඟා වීමට ගත වන කාලය t :

$a = \frac{1}{2}Ft^2$ (10) $\quad (s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \text{for } X)$

80

(b)



(5) (5)

P අංශුවට ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$\frac{1}{2}mv^2 + mg(2a\cos\theta) = 0 + mg.4a$ (15)

$\Rightarrow \quad v^2 = 4ga(2 - \cos\theta), \; \frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi$ (5)

නළය ඇතුළත වෘත්ත චලිතය සඳහා $\mathbf{F = ma}$ ↙ :

$mg\cos\theta + R = \frac{mv^2}{2a} = 2mg(2 - \cos\theta)$ (10) + (5)

$\Rightarrow \quad R = mg(4 - 3\cos\theta) > 0 \quad$ — (i) (5)

∴ මෙම ප්‍රතික්‍රියාව O කේන්ද්‍රය වෙතට වේ.

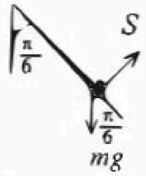
50

---

(11)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

සෘජු තලය ඇතුළත චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = \mathrm{m}a$ ↗ :



$$S - mg\cos\frac{\pi}{3} = m\,(0)$$

$$S = \frac{mg}{2} \quad (5)$$

B වෙත ළඟා වීමට මොහොතකට පෙර ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{mg}{2}$ ↗ (5)

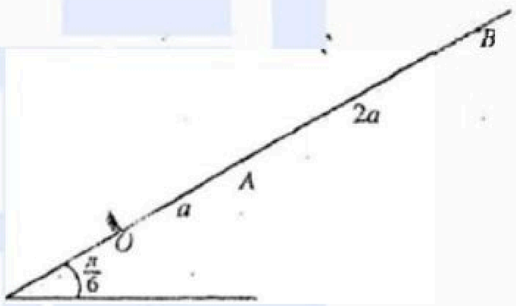
B වෙත පසු කර මොහොතකට පසු ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{5}{2}\,mg$ ↙ (5)

ඒ අනුව, B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව විශාලත්වයෙන් $\frac{mg}{2}$ සිට $\frac{5}{2}mg$ දක්වා වෙනස් වන අතර දිශාව පිටත සිට ඇතුළතට වෙනස් වේ. (5)

20

---

13. තිරසට $\frac{\pi}{6}$ කෝණයකින් ආනත සුමට අචල තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත $OA = a$ හා $AB = 2a$ වන පරිදි O පහළම ලක්ෂ්‍යය ලෙස ඇති O, A හා B ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් පිහිටා ඇත. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇත. P අංශුව B ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන තෙක් තන්තුව OAB රේඛාව දිගේ අදිනු ලැබේ. ඉන්පසු P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. B සිට A දක්වා P හි චලිත සමීකරණය, $0 \le x \le 2a$ සඳහා, $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $AP = x$ වේ.



$y = x + \frac{a}{2}$ යැයි ගෙන ඉහත චලිත සමීකරණය $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$ සඳහා $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ වේ.

ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය සොයා $\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, c විස්තාරය හා A වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

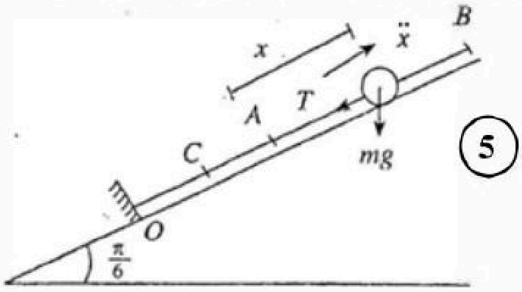
O වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය $\sqrt{7ga}$ බව පෙන්වන්න.

B සිට O දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලබන කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right\}$ බවත් පෙන්වන්න; මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ වේ.

P අංශුව O වෙත ළඟා වන විට, තලයට ලම්බව O හි සවිකර ඇති සුමට බාධකයක් හා එය ගැටෙයි. බාධකය හා P අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $0 < e \le \frac{1}{\sqrt{7}}$ නම්, පසුව සිදු වන P හි චලිතය සරල අනුවර්තී නොවන බව පෙන්වන්න.

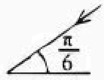
(12)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .



(5)

P හි චලිතය සඳහා : $\underline{F} = m\underline{a}$ ↙



$$T + mg\frac{1}{2} = m(-\ddot{x}) \text{ — (i)}$$ (10)

$$T = mg\left(\frac{x}{a}\right) \text{ — (ii)}$$ (5)

(i) හා (ii) න් ⇒ $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{g}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le 2a.$

(5)

25

$y = x + \frac{a}{2}$ ලිවීමෙන් $\ddot{y} = \ddot{x}$ ලැබේ. (5)

$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \ \frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$. (5)

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ.

10

සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය C, $\ddot{x} = 0$ එනම් $y = 0$ හෝ $x = \frac{-a}{2}$. (5) + (5)

මේ අනුව C ලක්ෂ්‍යය, OA මත $OC = \frac{a}{2}$ වන පරිදි වේ. (OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.)

c විස්තාරය, දෙනු ලබන සූත්‍රය $\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ.

B හිදී, $y = \frac{5a}{2}$ වන විට $\dot{y} = 0$. (5)

$\therefore 0 = \omega^2\left(c^2 - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$. (5)

අංශුව, A ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය u යැයි ගනිමු.

A හිදී $y = \frac{a}{2}$, $u^2 = \frac{g}{a}\left(\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. (5) + (5)

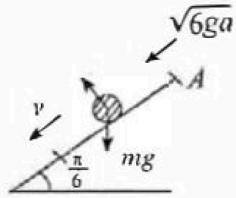
$\Rightarrow \quad u = \sqrt{6ga}$. (5)

35

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

A සිට *O* දක්වා *P* හි චලිතය

මෙම චලිතය තලය මත ගුරුත්වය යටතේ වේ.



$v^2 = u^2 + 2fs$ යෙදීමෙන්

↙ $v^2 = 6ga + 2\left(\frac{g}{2}\right).a$ (5)

$\therefore v^2 = 7ga$

$\therefore v = \sqrt{7ga}$ (5)

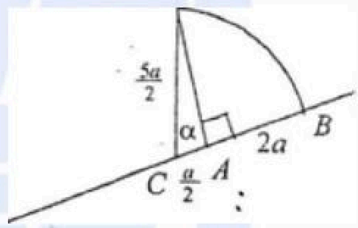
10

සරල අනුවර්තී චලිතය යටතේ *B* සිට *A* දක්වා *P* ගන්නා t_1 කාලය,

$\omega t_1 = \alpha.$ (5) දැන් $\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{1}{5}.$ (5)

$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right).$ (5)

ඊළඟට, *A* සිට *O* දක්වා චලිතයට *P* ගන්නා t_2 කාලය,



$v = u + at$ යෙදීමෙන් (5)

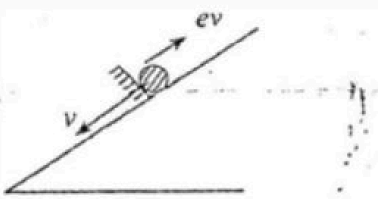
↙ $\sqrt{7ga} = \sqrt{6ga} + \frac{g}{2}t_2$

$\therefore t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)$ (5) $= 2k\sqrt{\frac{a}{g}}$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

$\therefore$ *B* සිට *O* දක්වා ගතවන කාලය (5)

$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right)$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

35



O හි සුමට බාධකය සමග ගැටීමට මොහොතකට පසුව *P* හි වේගය $ev = e\sqrt{7ga}$ (5)

$0 < z \le a$ වේ නම් අංශුවේ පසුව එන චලිතය සරල අනුවර්තී නොවේ; මෙහි z යනු ගුරුත්වය යටතේ, තලයේ ඉහළට චලනය වන දුර වේ. (10)

$v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්, (5)

↗ $0 = (ev)^2 - 2\left(\frac{g}{2}\right)z$ (14)

Alevel අපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$\Rightarrow \quad z = 7e^2a$ (5)

දැන්, $0 < z \leq a$

$\Leftrightarrow \quad 0 < 7e^2a \leq a$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 0 < e \leq \frac{1}{\sqrt{7}}.$ (5)

35

---

14. (*a*) $OACB$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ද D යනු AC මත $AD : DC = 2 : 1$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\lambda > 0$ වේ. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{BD}$ දෛශික, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

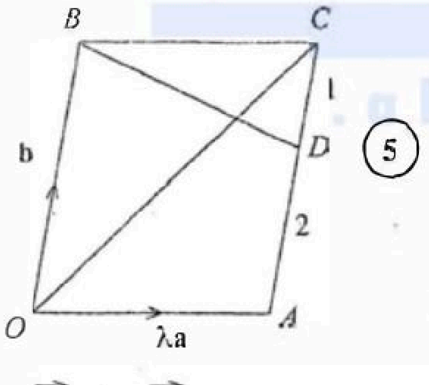
දැන්, $\overrightarrow{OC}$ යන්න $\overrightarrow{BD}$ ට ලම්බ වේ යැයි ගනිමු. $3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ බව පෙන්වා $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ නම්, λ හි අගය සොයන්න.

(*b*) කේන්ද්‍රය O හා පැත්තක දිග $2a$ වූ $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක තලයෙහි වූ බල තුනකින් පද්ධතියක් සමන්විත වේ. මූලය O හි ද Ox-අක්ෂය $\overrightarrow{OB}$ දිගේ ද Oy-අක්ෂය $\overrightarrow{OH}$ දිගේ ද ඇතිව බල හා ඒවායේ ක්‍රියා ලක්ෂ්‍ය, සුපුරුදු අංකනයෙන්, පහත වගුවේ දක්වා ඇත; මෙහි H යනු CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.
(P නිව්ටන වලින් ද a මීටර වලින් ද මනිනු ලැබේ.)

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$a\mathbf{i} - \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i} + \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.
දැන්, $\overrightarrow{FE}$ දිගේ ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $6P$ N වූ අතිරේක බලයක් මෙම පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය ඌනනය වන තනි බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(*a*)



(5)

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ (5)

$\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \lambda\mathbf{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ (5)

$\overrightarrow{BD} = \lambda\mathbf{a} + -\frac{1}{3}\mathbf{b}$

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD}$ ව බැවින් ඒවායේ අදිශ ගුණිතය $= 0$. (5)

$\Rightarrow (\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) \, . \, (\lambda\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}) = 0$

$\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + (1 - \frac{1}{3})(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - \frac{1}{3}|\mathbf{b}|^2 = 0$ (5) $(\because \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})$

$\Rightarrow 3\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ (5)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$

(15)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

$\Rightarrow$ $a \cdot b = |a|\,|b| \cos\frac{\pi}{3}$ (5)

$= \frac{1}{2}|a|^2$

ඉහත සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්,

$3|a|^2\lambda^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}|a|^2\lambda - |a|^2 = 0$ (5)

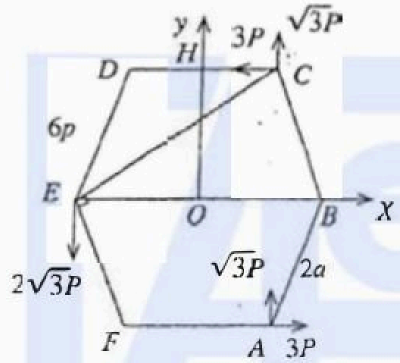
$3\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ (5)

$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$

$\lambda > 0$ බැවින් $\lambda = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$. (5)

50

(b)



ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික වන්නේ,

$\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i} - \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OC} = a\mathbf{i} + \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OE} = -2a\mathbf{i}$

රූපය සඳහා (15)

O හි දී පද්ධතිය ඌනනය කරමු.

$\rightarrow X = 3P - 3P = 0$ (10)

$\uparrow Y = \sqrt{3}P + \sqrt{3}P - 2\sqrt{3}P = 0$

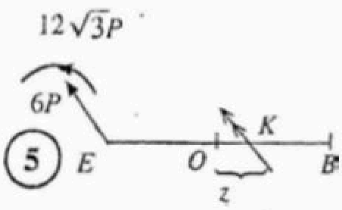
} $M \neq 0$ වේ නම් පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. (10)

$O \circlearrowleft\; 2 \times 3P \cdot a\sqrt{3}P + 2a\sqrt{3}P + (2a) \cdot 2\sqrt{3}P = M = 12a\sqrt{3}P \circlearrowleft$ (20)

යුග්මයේ ඝූර්ණය ($M \neq 0$) හි විශාලත්වය $12a\sqrt{3}P$ Nm වන අතර එය වාමාවර්ත වේ. (5) + (5)

65

නව පද්ධතිය



විශාලත්වය = 6P (5)

දිශාව =

(5)

$K \circlearrowright\; -6P \times (2a + z)\frac{\sqrt{3}}{2} + 12a\sqrt{3}P = 0$ (10)

$\Rightarrow z = 2a$ (5)

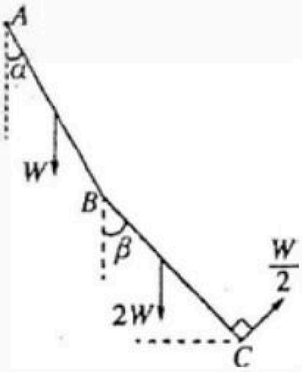
$\therefore$ නව පද්ධතිය $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය වේ. (5)

35

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

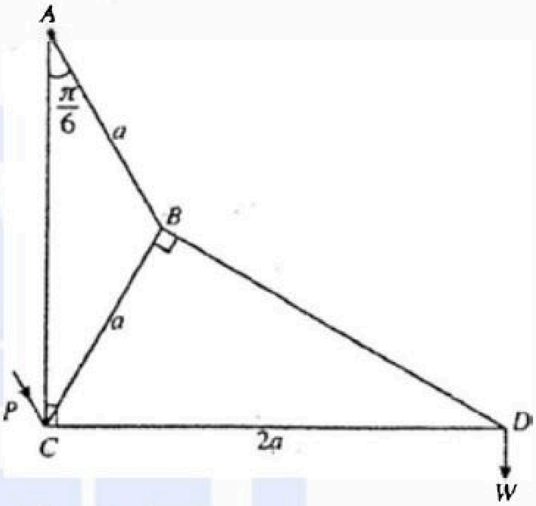
15. (a) එක එකක දිග $2a$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB දණ්ඩේ බර W ද BC දණ්ඩේ බර $2W$ ද වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. AB හා BC දඬු යටි අත් සිරස සමග පිළිවෙළින් α හා β කෝණ සාදමින් මෙම පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, C හි දී රූපයේ පෙන්වා ඇති BC ට ලම්බ දිශාව ඔස්සේ යෙදූ $\frac{W}{2}$ බලයක් මගිනි. $\beta = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වා, B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ බවත් පෙන්වන්න.



(b) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, BD, DC හා AC සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ.

මෙහි $AB = CB = a$ ද $CD = 2a$ ද $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ ද බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. D සන්ධියේ දී W භාරයක් එල්ලා, AC සිරස්ව ද CD තිරස්ව ද ඇතිව සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල සමතුලිතව තබා ඇත්තේ C සන්ධියේ දී AB දණ්ඩට සමාන්තරව රූපයේ පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, B හා C සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.



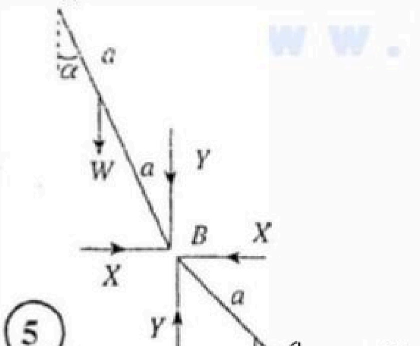
ඒ නයින්,

(i) ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් දඬු පහේම ප්‍රත්‍යාබල, හා

(ii) P හි අගය

සොයන්න.

(a)



(5)

BC සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

B ↺ $\frac{W}{2}(2a) = 2W.\, a\sin\beta$ (10)

$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{1}{2}. \quad \therefore \ \beta = \frac{\pi}{6}.$ (5) + (5)

BC සඳහා

⟵ $X = \frac{W}{2}\,.\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}\,W.$ (5)

↑ BC සඳහා : $Y = 2W - \frac{W}{2}\sin\beta$ (5)

$= \frac{7}{4}\,W.$ (5)

40

www.alevelapi.com

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

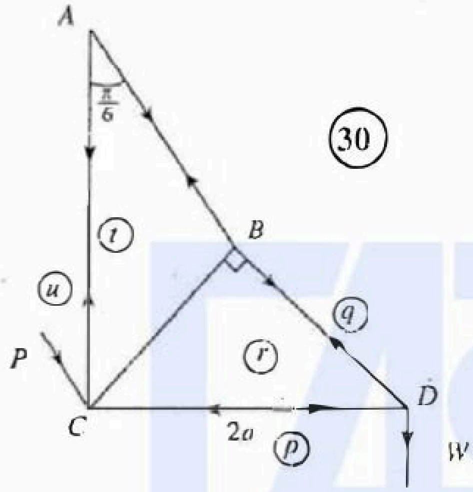
$A \circlearrowleft \quad X \cdot 2a\cos\alpha - Y\,2a\sin\alpha - W a\sin\alpha = 0$ (10)

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 9\sin\alpha .$ (5)

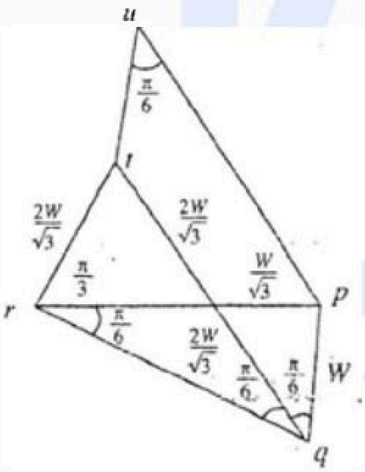
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9} .$ (5)

20

(b)



(30)



දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB	$\frac{4W}{\sqrt{3}}$	–
BC	$\frac{2W}{\sqrt{3}}$	–
AC	W	–
BD	$2W$	–
CD	–	$\sqrt{3}\,W$

(50)

$P = up = \dfrac{4W}{\sqrt{3}}$. (10)

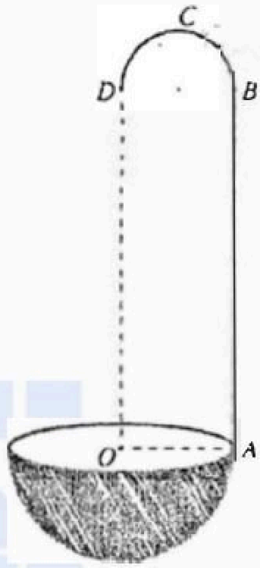
90

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

16. (i) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද

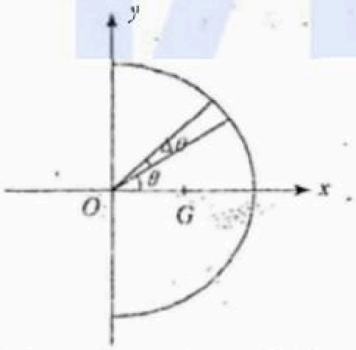
(ii) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය O හා අරය $2a$ වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දිග $2\pi a$ වූ AB සෘජු කොටසකින් ද BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වන පරිදි, අරය a වූ BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකින් ද සමන්විත ඒකාකාර කම්බියකින් සාදනු ලැබූ $ABCD$ තුනී මිටක් දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් හැන්දක් සාදා ඇත. A ලක්ෂ්‍යය අර්ධ ගෝලයේ ගැට්ට මත ඇති අතර OA යන්න AB ට ලම්බ ද OD යන්න AB ට සමාන්තර ද වේ. තව ද BCD යන්න $OABD$ හි තලයේ පිහිටා ඇත. අර්ධ ගෝලයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද මිටෙහි ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\frac{a\sigma}{2}$ ද වේ. හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, OA සිට පහළට $\frac{2}{19\pi}\left(8\pi-2\pi^2-1\right)a$ දුරකින් ද O හා D හරහා යන රේඛාවේ සිට $\frac{5}{19}a$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රළු තිරස් මේසයක් මත, අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය එය ස්පර්ශ කරමින්, හැන්ද තබා ඇත. අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{7}$ කි. $\overrightarrow{AO}$ දිශාවට A හි දී යොදනු ලබන තිරස් බලයක් මගින් OD සිරස්ව ඇතිව හැන්ද සමතුලිතතාවයේ තැබිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(i)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, මෙහි ρ යනු, ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු. එවිට

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho a\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\, d\theta} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{a\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} \quad (5)$$

$$= \frac{2a}{\pi} \quad (5)$$

ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් පිහිටයි.

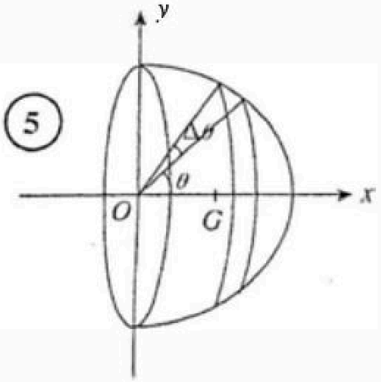
25

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(ii) සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\Delta m = 2\pi\,(a\sin\theta)\,a\rho\theta.\sigma$ මෙහි σ යනු, ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$. යැයි ගනිමු. එවිට



$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\,\sigma\,a\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\,\sigma\,d\theta}$$ (5) + (5)

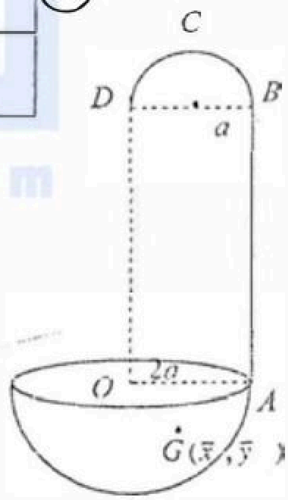
$$= \frac{\left.\frac{a\sin\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}$$ (5) + (5)

$$= \frac{a}{2}.$$ (5)

30

ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටයි.

වස්තුව	ස්කන්ධය	OD (→) සිට දුර	OA (↓) සිට දුර	
AB සෘජු කොටස	$\pi a^2\sigma$ (5)	$2a$	πa	(5)
BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටස	$\frac{\pi a^2\sigma}{2}$ (5)	a	$2\pi a + \frac{2a}{\pi}$	(5)
අර්ධ ගෝලාකාර කබොළ	$8\pi a^2\sigma$ (5)	0	$-a$	(5)
හැන්ද	$\frac{19\pi a^2\sigma}{2}$ (5)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	



$$\frac{19\pi a^2\sigma}{2}\,\bar{y} = \pi a^2\sigma.\,\pi a + \frac{\pi a^2\sigma}{2}\left(2\pi a + \frac{2a}{\pi}\right) + 8\pi a^2\sigma\,(-a)$$ (10)

$$\frac{19\pi}{2}\,\bar{y} = -8\pi a + 2\pi a + a$$ (5)

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{-2}{19\pi}\,(8\pi - 2\pi^2 - 1)a$$

∴ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OA සිට $\frac{2}{19\pi}\,(8\pi - 2\pi^2 - 1)\,a$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

$$\frac{19\pi a^2\sigma}{2}\,\bar{x} = \pi a^2\sigma.\,2a + \frac{\pi a^2\sigma}{2}\,.\,a + 8\pi a^2\sigma\,.\,0$$ (10)

$$\therefore\ \frac{19}{2}\bar{x} = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{5a}{19}$$ (5)

65

∴ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OD සිට $\frac{5a}{19}$ දුරකින් පිහිටයි.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

මාසික වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්)	f	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය x ⑤	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy ⑤	fy^2 ⑤
5 - 15	9	10	1	1	9	9
15 - 25	11	20	2	4	22	44
25 - 35	14	30	3	9	42	126
35 - 45	10	40	4	16	40	160
45 - 55	6	50	5	25	30	150
	50				$\sum fx = 143$ ⑤	$\sum fx^2 = 489$ ⑤

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{143}{50} \quad ⑤ \quad \text{හා} \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2 = \frac{489}{50} - \left(\frac{143}{50}\right)^2 \quad ⑤$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{4001}}{50} \quad ⑤$$

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් :

$\mu_x = 10\mu_y = 10\left(\frac{143}{50}\right) = 28.6$ රුපියල් දහසේ ඒවා ⑤

(= රු. 28600)

හා $\sigma_x = 10\sigma_y = \frac{\sqrt{4001}}{5} \approx 12.65$ රුපියල් දහසේ ඒවා ⑤

($\approx$ රු. 12650)

50

නව මාසික වේතනය : $z = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$, මෙහි x යනු කලින් මාසික වේතනයයි.

⑤

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් : $\mu_z = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\mu_x$

$29172 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) 28600$ ⑤

$\Rightarrow \frac{29172}{286} = 100 + p \qquad \therefore p = 2$ ⑤

$\sigma_z \approx \left(1 + \frac{2}{100}\right)\sigma_x \approx \frac{51}{50} \times 12.65$ ⑤

20

≈ 12.9 රුපියල් දහසේ ඒවා

($\approx$ රු. 12900)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .