

(-) അഭിമാനം നഷ്ടപ്പെട്ട ജനതയ്ക്ക് അഭിമാനം തിരികെ

$\sqrt{-1}$ අනාත්මික ඒකකය ලෙස නම් කරනු ලැබේ.

$\sqrt{-1} = i$ ଓ ଏହା ହେଉଛି ଆବଶ୍ୟକ

$$i^2 = -1$$
$$\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = i2$$

$$\sqrt{-12} = i\sqrt{12} = i2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-9} = i\sqrt{9} = i3$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = i\sqrt{2} \times i\sqrt{3}$$

$$= i \times i \times \sqrt{2 \times 3}$$

$$= i^2 \times \sqrt{2 \times 3}$$

$$= i^2 \sqrt{6}$$

$$= -1 \times \sqrt{6}$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = (-2)^{1/2} \times (-3)^{1/2}$$

$$= (-2 \times -3)^{1/2}$$

$$= 6^{1/2}$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$$

ഇതുകൊണ്ട്
മറുപടി നൽകി
ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$i^2 = i \times i = -1$$

$$i^3 = i \times i^2 = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1$$

$$i^5 = i^2 \times i^2 \times i = -1 \times -1 \times i = i$$

$$i^6 = i^2 \times i^2 \times i^2 = -1 \times -1 \times -1 = -1$$

$$i^7 = i^2 \times i^2 \times i^2 \times i = -1 \times -1 \times -1 \times i = -i$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = i^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$x = \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

നാല്കി അധിപാൽ
ന പൂർണ്ണക അധിപാൽ
ഒരു വീ മൂലം.

$$x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$x = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

നാല്കി അധിപാൽ
ന പൂർണ്ണക അധിപാൽ
ഒരു വീ മൂലം.

നാല്കി അധിപാൽ നാ പൂർണ്ണക അധിപാൽ ഒരു
വീക്ക് അധിപാൽ അധിപാൽ അധിപാൽ ഒരു.

$$\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{i \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\in \mathbb{R}}$$

අනන්ත
ඒකක

$x, y \in \mathbb{R}$ නම්

$x + iy$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් වේ.

2012/11/23

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් Z ලෙස දැක්වේ.

$x, y \in \mathbb{R}$ නම්,

$$Z = x + iy$$

හෝ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් Z ලෙස දැක්වේ.

← සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ ඍණාත්මක කොටස

$$\text{Re}(Z) = x$$

$$\text{Im}(Z) = y$$

← සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ ධනාත්මක කොටස

ආරම්භක අවස්ථාවේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක්
පරිහරණය වූ පසුව එහි ප්‍රමාණය වෙනස් වේ.

මෙම පරිහරණය වූ පසුව එහි ප්‍රමාණය වෙනස්
වේ. මෙම පරිහරණය වූ පසුව එහි ප්‍රමාණය වෙනස්
වේ.

$Z_1 = 3 + i4$ ജംക്ടർക്കു ചുറ്റുമുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $(3, 4)$

$Z_2 = 2 - i5$, ၁၅၆၈၀၆၈၈ ဖြစ်သလား?

$$Z_2 = 2 + i(-5)$$

രണ്ടാമത്തെ ഗ്രാഫ് = $(2, -5)$

കേരളം മാറിമാർ കാഴ്ചപ്പെട്ടു നിലനിൽക്കുന്ന ചരിത്ര

$$Z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ଚଳେ ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଚାରିଟି.

$$|z| = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2}$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1, \quad Z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{or}$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_1 Z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
 &= x_1 x_2 + iy_2 x_1 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\
 &= x_1 x_2 + i(y_2 x_1 + y_1 x_2) + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2 \\
 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\
 &= \frac{x_1 + iy_1}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
 &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2 x_2 - iy_2 \cdot iy_2} \\
 &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - \underbrace{i^2}_{-1} y_2^2} \\
 &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2^2 - y_2^2} \\
 &= \frac{x_1}{(x_2^2 - y_2^2)} + i \frac{y_1}{(x_2^2 - y_2^2)}
 \end{aligned}$$

ചംകിർപ്പാ ധരയിലാ 2 ക മിശ്രിതം, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
 ഗുണകം, മുതലാക്കി ചംകിർപ്പാ ധരയിലാക്കി തി.

ചംകിർപ്പാ ധരയിലാക്കി ഗുണിപ്പ് വെ ചംകിർപ്പാ ധരയിലാ

Z ചംകിർപ്പാ ധരയിലാക്കി ഗുണിപ്പ് വെ $\bar{Z}$ വെ x ധരയിലാക്കി തി.

$Z = x + iy$ ന് $\bar{Z}$ ന് ഗുണിപ്പ് വെ $\bar{Z} = x - iy$ വെ ധരയിലാക്കി തി.

$\bar{Z}$ ചംകിർപ്പാ ധരയിലാക്കി ഗുണിപ്പ് വെ $(\bar{\bar{Z}})$

$$(\bar{\bar{Z}}) = Z$$

$$(\bar{\bar{Z}}) = Z$$

$$\begin{aligned} Z \cdot \bar{Z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \end{aligned}$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 - i^2 y^2$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$$

$$\because i \times i = i^2 \text{ (ഗുണിപ്പ് വെ)}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1 \text{ ന്റെ}$$

$$i^2 = -1$$

$$Z = x + iy$$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\{Z\} = x - iy \quad \text{--- (2)}$$

$$\{Z\} = x + i(-y) \quad \text{--- (3)}$$

$$|\bar{Z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$$

$$|\bar{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- (4)}$$

$$-Z = -x - iy$$

$$-Z = -x + i(-y)$$

$$|-Z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2}$$

$$|-Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z| = |-Z| = |\bar{Z}|$$

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବରେ କୁହେଲେ ଯଦି $Z = x + iy$ ହୁଏ ତେବେ $|-Z| = |Z|$ ଏବଂ $|\bar{Z}| = |Z|$ ହେବ ।

$Z = x + iy$ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବରେ କୁହେଲେ ଯଦି $Z = x + iy$ ହୁଏ ତେବେ $|-Z| = |Z|$ ଏବଂ $|\bar{Z}| = |Z|$ ହେବ ।

$$Z = x + iy$$

$$\lambda Z = \lambda(x + iy)$$

$$\{\lambda Z = \lambda x + i(\lambda y)\}$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{and} \quad Z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{then,}$$

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 Z_1 &= (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) \\ &= x_2 x_1 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1 + i^2 y_2 y_1 \\ &= x_2 x_1 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) + \underbrace{i^2}_{-1} y_2 y_1 \end{aligned}$$

$$Z_2 Z_1 = (x_2 x_1 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$\therefore Z_2 Z_1 = Z_1 Z_2$$

ଉଦାହରଣ ୨: ଅନୁବ୍ରତ୍ତ ପ୍ରମାଣ

$\frac{1}{x+iy}$ ରେ x ଓ y ଅନୁବ୍ରତ୍ତ ଅନୁସାରେ ଉପଲବ୍ଧ ହେବା ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କରିବା.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+iy} &= \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\ &= \frac{x-iy}{x^2 - (iy)^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2 - i^2 y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{x+iy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) + i \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{1}{x+iy}$$

$$Z = x+iy \text{ ന്റെ}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$$

മുകളിലെ ഉത്തരവിലെ :- അങ്കിർപ്പന നരത്ത് പ്രതിരോധ

Z അങ്കിർപ്പന നരത്ത് പ്രതിരോധ W ന്റെ
 $(W = Z^{-1})$ $ZW = WZ = 1$ ആണ്.

$$Z \cdot \bar{Z} = \bar{Z} \cdot Z = |Z|^2$$

$$Z \cdot \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} \cdot Z = 1$$

$$ZW = WZ = 1$$

∴ W යනු Z හි ප්‍රතිලෝමය ය.

$$W = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$$

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$$

② Z යනු සංඛ්‍යා රාශියක් නම්,

$$i) Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$$

$$ii) Z - \bar{Z} = 2i \operatorname{Im}(Z)$$

$$iii) Z\bar{Z} = |Z|^2$$

$$iv) \bar{Z}^{-1} = Z$$

$$v) |kZ| = |k| |Z|$$

$Z = x + iy$ යනු. එවිට

$$\operatorname{Re}(Z) = x \quad \text{--- ①}$$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- ③}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = y \quad \text{--- ②}$$

$$\bar{Z} = x - iy \quad |\bar{Z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$i) Z + \bar{Z} = x + iy + x - iy$$

$$Z + \bar{Z} = 2x, \quad \text{① හි ආදායම}$$

$$Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } z - \bar{z} &= \cancel{x+iy} - \cancel{x+iy} \quad x+iy - (x-iy) \\
 &= x+iy - x+iy \\
 &= 2iy \quad \text{(2) ন ঘর/১০০}
 \end{aligned}$$

$$z - \bar{z} = 2 \cdot i (\text{Im}(z))$$

$$\underline{z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)}$$

iii)

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 - (iy)^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 - \underbrace{i^2}_{-1} y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \quad \text{(3) ন ঘর/১০০}$$

$$\underline{z \bar{z} = |z|^2}$$

iv)

$$z = x+iy$$

$$\bar{z} = x-iy$$

$$\overline{(\bar{z})} = x - (-iy)$$

$$\overline{(\bar{z})} = x+iy$$

$$\therefore \underline{\overline{(\bar{z})} = z}$$

1)

$$Z = x + iy$$

$$kZ = kx + ki y$$

$$kZ = kx + i(ky)$$

$$\overline{kZ} = kx - i(ky) = kx + i(-ky)$$

$$|\overline{kZ}| = \sqrt{(kx)^2 + (-ky)^2}$$

$$|\overline{kZ}| = \sqrt{k^2 x^2 + k^2 y^2}$$

$$|\overline{kZ}| = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)}$$

$$|\overline{kZ}| = \sqrt{k^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

② ന്റെ ഘടന

$$|\overline{kZ}| = |k| |\overline{Z}|$$

$$|\overline{kZ}| = |k| |\overline{Z}|^2$$

$$\therefore |\overline{Z}| = |Z|$$

② Z_1 and Z_2 are complex numbers

$$i) \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$ii) \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$iii) \overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\text{or } \overline{Z_1} = x_1 - iy_1$$

$$\overline{Z_2} = x_2 - iy_2$$

$$i) Z_1 + Z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$Z_1 + Z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)$$

$$= x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$ii) Z_1 - Z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\overline{Z_1 - Z_2} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)$$

$$\overline{Z_1 - Z_2} = x_1 - x_2 - iy_1 + iy_2$$

$$= \underbrace{x_1 - iy_1}_{Z_1} - \underbrace{(x_2 - iy_2)}_{Z_2}$$

$$\overline{Z_1 - Z_2} = Z_1 - Z_2$$

$$iii) Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_2x_1 + ix_2y_1 + i^2y_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$= x_1x_2 - i(x_1y_2) - i(x_2y_1) + i^2y_1y_2$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$$

z_1, z_2 , যখন z_1 ও z_2 ,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ এর সমতুল্য।}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \text{ (or } \infty)$$

$$\bar{z}_2 = x_2 - iy_2 \text{ এর।}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 - iy_2x_1 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - (iy_2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(y_2x_1 - y_1x_2)}{x_2^2 - \underbrace{i^2}_{-1}y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(x_1 - i y_1)(x_2 + i y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1 \cdot z_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_2|$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1 \cdot z_2}{|z_2|^2}$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2$$

$$\frac{z_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{\bar{z}_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \times \frac{1}{\bar{z}_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{--- (A)}$$

① ÷ ② or

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

① or ② or ③ or ④

$$\frac{z_1}{z_2} \left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \right) = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|^2 \bar{z}_2}{|z_1|^2 \bar{z}_1}$$

⑤

$$\frac{z_1}{z_2} = \phi \text{ or } \textcircled{5}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \overline{\phi}$$

$$\phi \overline{\phi} = |\phi|^2$$

$$\therefore \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = |\phi|^2$$

$$|\phi| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ ————— } \textcircled{4}$$

$$\textcircled{5} \text{ or } |\phi| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ ————— } \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} = \textcircled{5} \text{ or } \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ ————— } \textcircled{B}$$

iii)

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \text{ ————— } \textcircled{1}$$

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2 \text{ ————— } \textcircled{2}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

① × ②

$$z_1 \overline{z_1} \times z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$$

$$z_1 z_2 \times \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$$

$$\cancel{z_1 z_2} = \cancel{W} \text{ or } \text{or}$$

$$\cancel{z_1 z_2} \times \overline{\cancel{z_1} \cancel{z_2}} =$$

$$z_1 z_2 = \frac{|z_1|^2 |z_2|^2}{\overline{z_1} \overline{z_2}}$$

$$z_1 z_2 = W \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{W} \quad \text{www.MathsApi.com}$$

$$(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = |z_1 z_2|^2$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + y_2 x_1)$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (y_1 x_2 + y_2 x_1)^2}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + (y_1 x_2)^2 + (y_2 x_1)^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_2^2(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\underline{\underline{|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|}}$$

2) z හි Re සහ Im අගයන් සීමා කිරීම.

i) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ බව පෙන්වමු.

ii) $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

$z = x + iy$ යන විට, $Re(z) = x$
 $Im(z) = y$

$$i) \quad z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- ①}$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \text{or}$$

$$\operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad \text{or}, \quad \operatorname{Re}(z) = |\operatorname{Re}(z)|$$

$$\operatorname{Re}(z) < 0 \quad \text{or}, \quad |\operatorname{Re}(z)| > 0 \quad \text{or}$$

$$\operatorname{Re}(z) < |\operatorname{Re}(z)|$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) \geq |\operatorname{Re}(z)|$$

$$\textcircled{1} \text{ or } |z| = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + y^2}$$

$$(y^2 > 0 \text{ or})$$

$$y^2 > 0$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z)^2 + y^2 > \operatorname{Re}(z)^2$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + y^2} > \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2}$$

$$|z| > 0 \quad \text{or}$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + y^2} > 0 \quad \text{or}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad \text{or}$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + y^2} > \operatorname{Re}(z)$$

$$|z| > \operatorname{Re}(z)$$

$$y \geq 0 \quad \text{or} \quad y \leq 0$$

$$\therefore \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + y^2} \geq |\operatorname{Re}(z)|$$

$$|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \quad \left(\text{when } y=0 \right)$$

$$\therefore |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq \operatorname{Re}(z)$$

ii) ~~Let~~ $z = x + iy$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ or } \operatorname{Im}(z) < 0$$

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ so } |\operatorname{Im}(z)| = \operatorname{Im}(z) \text{ or}$$

$$\operatorname{Im}(z) < 0 \text{ so } |\operatorname{Im}(z)| > \operatorname{Im}(z) \text{ or}$$

$$\therefore |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im}(z)$$

$$\text{For } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2}$$

$$\text{Now } x^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \geq \operatorname{Im}(z)^2$$

$$\sqrt{x^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \geq |\operatorname{Im}(z)|$$

$$|z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$$

$$|z| \geq |\operatorname{Im} z| \geq \operatorname{Im}(z)$$

04) Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි.
 $Z + \bar{Z} \leq 2|Z|$ බව පෙන්වන්න.

$$|Re(Z)| + |Im(Z)| \leq \sqrt{2} |Z| \text{ බව.}$$

$$Z = x + iy \text{ වේ, } Z + \bar{Z} = x + iy + x - iy$$

$$\bar{Z} = x - iy$$

$$Z + \bar{Z} = 2x \quad \text{--- ①}$$

$$(Z + \bar{Z})^2 = 4x^2$$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

~~$$|Z| = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$~~

~~$$\therefore |Z| + |\bar{Z}| = 2|Z|$$~~

~~$$4\sqrt{x^2 + y^2} = 4|Z| \quad \text{and} \quad 4x^2 > x^2$$~~

~~$$Z + \bar{Z} = 2x$$~~

~~$$4x^2 \leq x^2 + 3x^2$$~~

~~$$Z + \bar{Z} \leq |Z + \bar{Z}|$$~~

~~$$Z + \bar{Z} \leq 2x$$~~

~~$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$$~~

~~$$(Z + \bar{Z})^2 \geq 0$$~~

~~$$Z^2 + \bar{Z}^2 + 2Z \cdot \bar{Z} \geq 0$$~~

~~$$Z^2 + \bar{Z}^2 \geq -2Z \cdot \bar{Z}$$~~

~~$$(Z + \bar{Z})^2 \leq Z^2$$~~

~~$$Z^2 + 2Z \cdot \bar{Z} + \bar{Z}^2 \leq Z^2$$~~

~~$$2Z \cdot \bar{Z} + \bar{Z}^2 \leq Z^2 - Z^2$$~~

$$|Z| + |\bar{Z}| \geq |Z|$$

$$(|Z| + |\bar{Z}|)^2 \geq |Z|^2$$

$$|Z|^2 + |\bar{Z}|^2 + 2|Z||\bar{Z}| \geq |Z|^2$$

$$2|Z||\bar{Z}| \geq -|\bar{Z}|^2$$

$$Z + \bar{Z} = 2x \quad \text{--- (1)}$$

~~$$Z + \bar{Z} \leq 2x^2$$~~

~~$$Z + \bar{Z} \leq 2(x^2 + y^2)$$~~

$$x^2 + y^2 > x^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} > |x| \quad \text{--- (2)}$$

∴ (1), (2) ର

$$Z + \bar{Z} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

ଯଦି $y=0$ ହେଉଥିବା

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore Z + \bar{Z} \leq 2|Z|$$

~~$$|Z + \bar{Z}| \leq$$~~

~~Z_1 and Z_2 ଯଦି $y=0$ ହେଉଥିବା~~

$$x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

ଯଦି $x \geq 0$ ହେଉଥିବା, $y=0$ ହେଉଥିବା.

$$\therefore x \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) ର $Z + \bar{Z} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$Z + \bar{Z} \leq 2|Z|$$

~~$$x + y \geq x$$~~
~~$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2$$~~
~~$$x$$~~

~~$$Z + \bar{Z} = 2x$$~~

~~$$2x \leq 2|Z|$$~~

~~$$x \leq |Z|$$~~

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0$$

$$|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \geq 0$$

$$|x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$|x|^2 + |y|^2 + |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y| + |x|^2 + |y|^2$$

$$2(|x|^2 + |y|^2) \geq (|x| + |y|)^2$$

$$(|x|^2 + |y|^2) \geq (|x| + |y|)^2$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

$$|\operatorname{Re}(z)| = |x|, \quad |\operatorname{Im}(z)| = |y|$$

$$\therefore 2|z|^2 \geq (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2$$

$$\underline{\underline{\sqrt{2}|z| \geq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)}}$$

z_1, z_2 , ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$z \bar{z} = |z|^2$$

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1 + z_2|^2$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1 + z_2|^2$$

$$\underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{|z_1|^2} + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + \underbrace{z_2 \bar{z}_2}_{|z_2|^2} = |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$z_1(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$z_1 \bar{z} = \bar{z} z_1$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2$$

$$Z = z_1 \bar{z}_2 \text{ e.g. } 1.5 - 1.5i$$

$$\bar{Z} = \overline{z_1 \bar{z}_2}$$

$$\bar{Z} = \bar{z}_1 (\overline{\bar{z}_2})$$

$$\bar{Z} = \bar{z}_1 z_2$$

$$\therefore |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{z_1 \bar{z}_2}_Z + \underbrace{z_2 \bar{z}_1}_{\bar{Z}} = |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + Z + \bar{Z} = |z_1 + z_2|^2$$

$$Z + \bar{Z} \leq 2|Z| \text{ e.g. } 1.5 - 1.5i + 1.5 + 1.5i = 3$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|Z| \geq |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| \geq |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1|^2 + |\bar{z}_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| \geq |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_2| = |\bar{z}_2| \text{ e.g. } 1.5 - 1.5i \text{ and } 1.5 + 1.5i \rightarrow |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |\bar{z}_2|^2 \geq |z_1 + z_2|^2$$

$$(|z_1| + |\bar{z}_2|)^2 \geq |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1| + |\bar{z}_2| \geq |z_1 + z_2|$$

$$\underline{\underline{|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|}}$$

$$| |z_1| - |z_2| | \leq |z_1 - z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$W = z_1 + z_2$$

$$\bar{W} = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$z_1, z_2 - z_1$ යන දෙකම z_1 මගින්
 ① z_1 මගින්

$$|z_1 + (z_2 - z_1)| \leq |z_1| + |z_2 - z_1|$$

$$|z_2| \leq |z_1| + |z_2 - z_1|$$

$$|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$$

$z_2, z_1 - z_2$ යන දෙකම z_2 මගින්

$$|z_2 + (z_1 - z_2)| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| = z' \text{ මගින් } ①, ② \text{ අනුව}$$

$$|z_2 - z_1| = z'' \text{ මගින්}$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$① \text{ ම } -z'' \leq z'$$

මගින්

$$② \text{ ම } z' \leq z' \quad |z_1 - z_2| \geq \pm (|z_1| - |z_2|)$$

$$\therefore |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$Z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

കേരളി ഭഗവതി മംഗലം അർപ്പണം സർവ്വം ഭാഗ്യം.

අපේ අත්විල :- අංකිතා හා රිෂා ආදිය

മേറ്റേഴ്‌സ്‌ ഫോൺ നമ്പർ $|Z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2}$$

සංකීර්ණ අංකයක් $(+)$ අංකයක් වේ.

ಹಂಕಿ ಕೂ ಬಾವಿಯಾಗಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಳು

Z ଅଂଶିତ ଯଦିଏକ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ. Z ଏହାକୁ ସମସ୍ତ
ରଖନ୍ତି.

$$\overline{z} = x + i(-y)$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| \text{ etc.}$$

$$z \cdot \bar{z} = |\bar{z}|^2$$

Z ஊக்கிதா ஸாதுயசா துதலுல்லா W ஸ,

$$ZW = WZ = 1$$

$$z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2$$

$$\frac{z \bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z} z}{|z|^2} = 1$$

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \text{ ശെ.}$$

z ന്റെ പ്രതിരോധ ഓതിപ്പായ z^{-1} ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(a) $|z^2| = |z|^2$ നെ കാണിക്കുക.

$z = x + iy$ എന്ന് എടുക്കാം. $x, y \in \mathbb{R}$

$$z \cdot z = (x + iy)(x + iy)$$

$$z^2 = x^2 + (iy)^2 + 2 \cdot iy$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2iy$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2iy$$

$$|z^2| = |z \cdot z|$$

$$|z^2| = |z| |z|$$

$$\underline{\underline{|z^2| = |z|^2}}$$

പരസ്പരം ലംബമായ 2 കെ അളവുകോലുകൾ

പരസ്പരം ലംബമായ 2 കെ അളവുകോലുകൾ, തമ്മിൽ
തെളിയിക്കാൻ നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം. തെളിയിക്കാൻ നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം
തന്നെ ശ്രമിക്കാം.

$$Z_1 = x_1 + iy_1$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2$$

$$Z_1 = Z_2 \text{ ന്റെ,}$$

$$x_1 = x_2 \text{ ഉം}$$

$$iy_1 = iy_2 \text{ ഉം തെളിയിക്കാം.}$$

$$\sqrt{5 + i12} \quad \text{and its conjugate}$$

$$\cancel{Z = 5 + i(12)}$$

$$\sqrt{5 + i12} = x + iy = Z^{\frac{1}{2}}$$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(5 + i12)^2} = (x + iy)^2$$

$$5 + i12 = \cancel{25 + i^2 144 + i^2 120} = x^2 + y^2 + 2ixy$$

$$\cancel{(25 - 144) + i(120)} = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

comparing both sides

$$\cancel{25 - 144} = x^2 - y^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$120 = 2xy$$

$$5 = x^2 - y^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$12 = 2xy$$

$$6 = xy$$

$$x = \frac{6}{y} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) ✓

$$5 = \frac{36}{y^2} - y^2$$

$$5y^2 = 36 - (y^2)^2$$

$$0 = (y^2)^2 + 5y^2 - 36$$

$$0 = (y^2)^2 + 9y^2 - 4y^2 - 36$$

$$0 = y^2(y^2 + 9) - 4(y^2 + 9)$$

$$0 = (y^2 - 4)(y^2 + 9)$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$y^2 = -9$$

$$\cancel{y^2 = -9}$$

∵ $y \in \mathbb{R}$ ∴

$$y^2 \neq -9$$

$$\therefore y = \pm 2$$

$\textcircled{2} \text{ or } x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
 $x = \frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $x = \frac{b}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$

$\therefore \sqrt{5\frac{3}{2} + i 12} = \underline{\underline{\frac{3}{2} + i 3}} \text{ or } \underline{\underline{-2 + i(-3)}}$

$x \in \mathbb{R}$ නිසා,

$x \leq |x|$

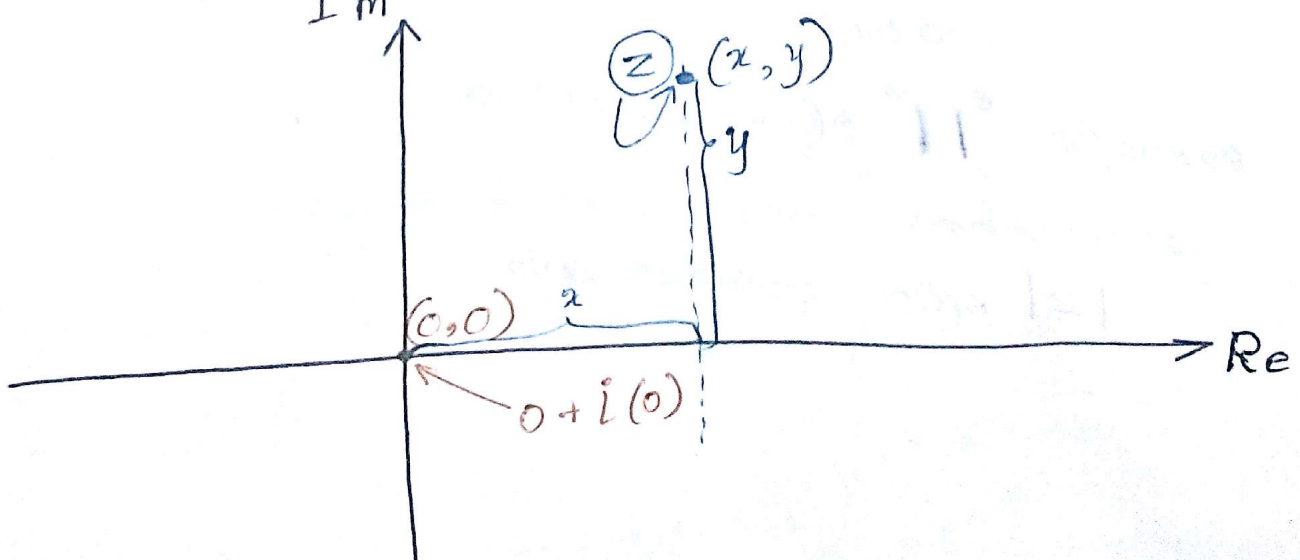
ආත්තයට පවතින්නේ $x \geq 0$ නිසාය.

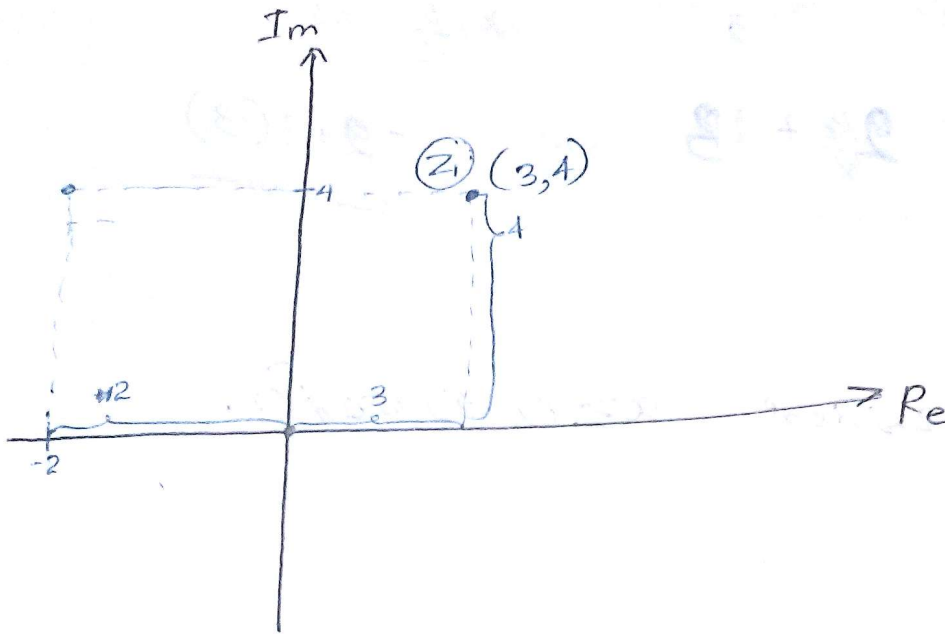
$x, y \in \mathbb{R}$

$Z = x + iy$

මෙම අංකයට අත්වැරෙන උප ගණිත සුගමය (x, y)
 $\text{Re}(z)$ $\text{Im}(z)$

අගය කිරීමේ කාර්යය අසාදනය කර
 දීම අනන්ත අසාදනයක් නිසාදීමට හැකි.
 මෙම අසාදනය මෙම මාසය අනුමතය වැටේ.





$$Z_1 = 3 + i(4) \quad Z_2 = -2 + i(4) \quad Z_3 = 3i + 4i$$

$$A = (3, 4) \quad B = (-2, 4)$$

MathsApi.com

සංකීർണ്ണ സംඛ්‍යාවල ව්‍යාපාරය

අර්ථ දැක්වීම - අගත් අලංකාර සංකීර්ණ
සංඛ්‍යාවක් ජාලයේ ලක්ෂණයක්
සංකීර්ණ ඉලක්කය යනු එක් එක්
ලක්ෂණයේ දිග සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ
ව්‍යාපාරයයි.

ව්‍යාපාරය "||" ලෙස දැක්වේ.

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ ව්‍යාපාරය
|z| ලෙස දැක්වේ.

പരമിത രേഖാചിത്രം

പരമിത രേഖാചിത്രം എന്നത് ഒരു കോർഡിനേറ്റ് സിസ്റ്റത്തിൽ ഒരു കോംപ്ലക്സ് സംഖ്യയെ $z = x + iy$ എന്ന രീതിയിൽ പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതാണ്. ഇതിൽ x എന്നത് z യുടെ റീയൽ ഭാഗവും y എന്നത് z യുടെ ഇമിറ്ററി ഭാഗവുമാണ്. z ന്റെ മൂല്യം $|z|$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

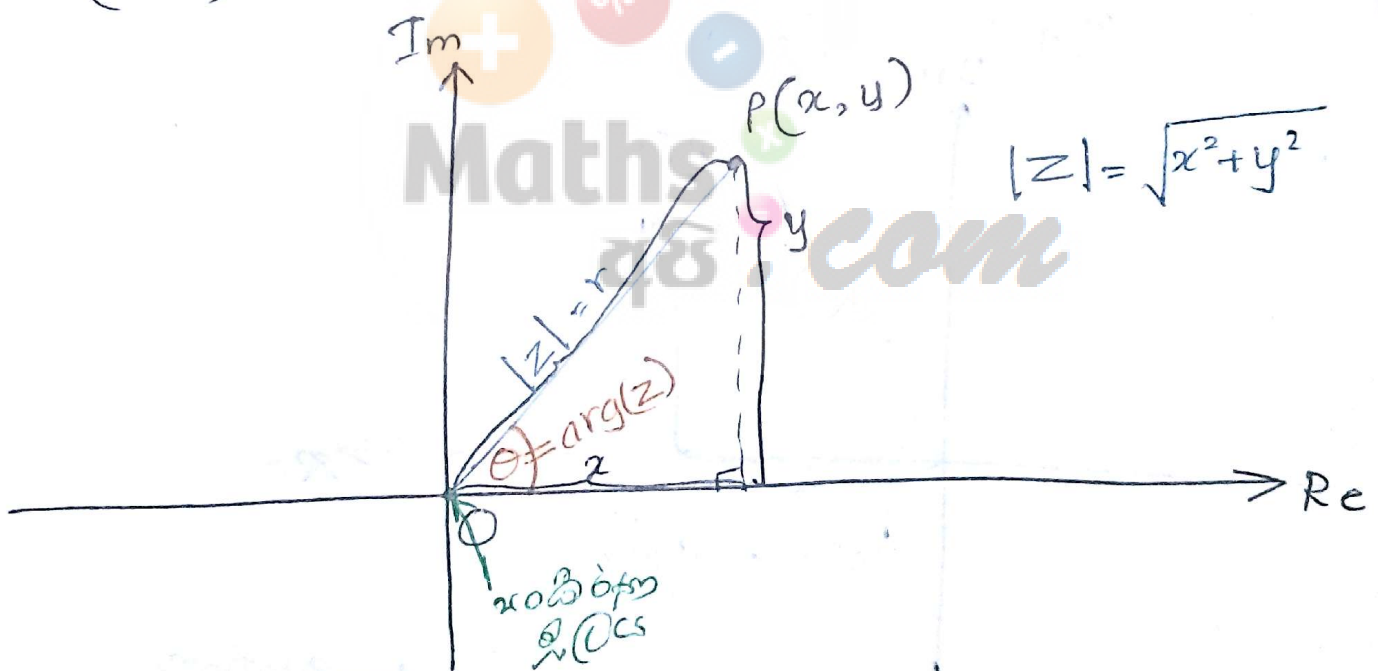
z പരമിത രേഖാചിത്രം ചിത്രീകരിക്കുക

$\arg(z)$

ഈ കോണിനെയാണ് $\arg(z)$ എന്ന് പറയുന്നത്.

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$P(x, y)$ ← പരമിത രേഖാചിത്രം

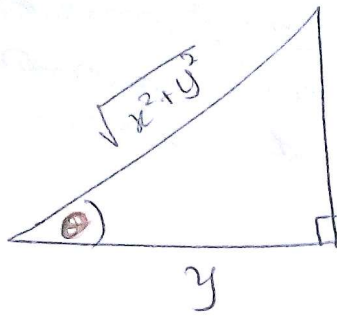


പരമിത രേഖാചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് z ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക

$$z = x + iy$$

$$z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_r \left\{ \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\sin \theta} + i \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\cos \theta} \right\}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

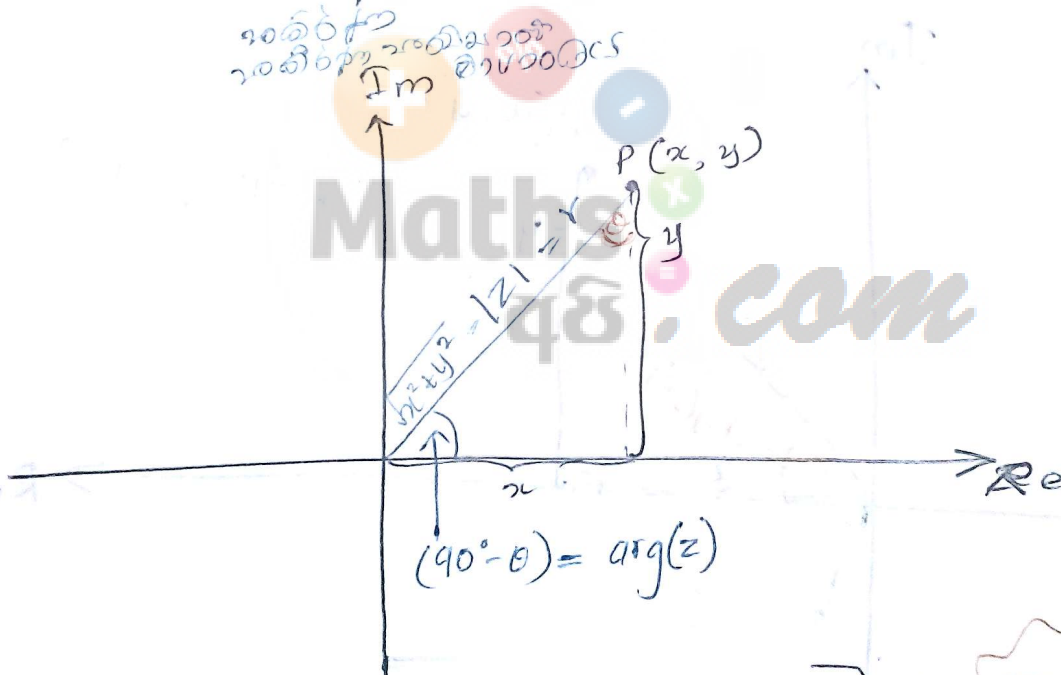


$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Z = r(\sin \theta + i \cos \theta)$$

ഒരു സമീപന രേഖാചിത്രം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$$Z = r(\sin \theta + i \cos \theta) \quad \text{--- (1)}$$



$$\textcircled{1} \text{ ന് } Z = r [\cos (90^\circ - \theta) + i \sin (90^\circ - \theta)]$$

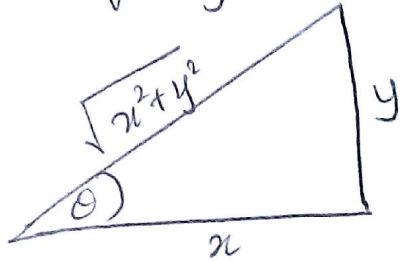
$\arg(z)$

ഏകദേശം
സമീപന
രേഖാചിത്രം
ചുവടെ

$$Z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

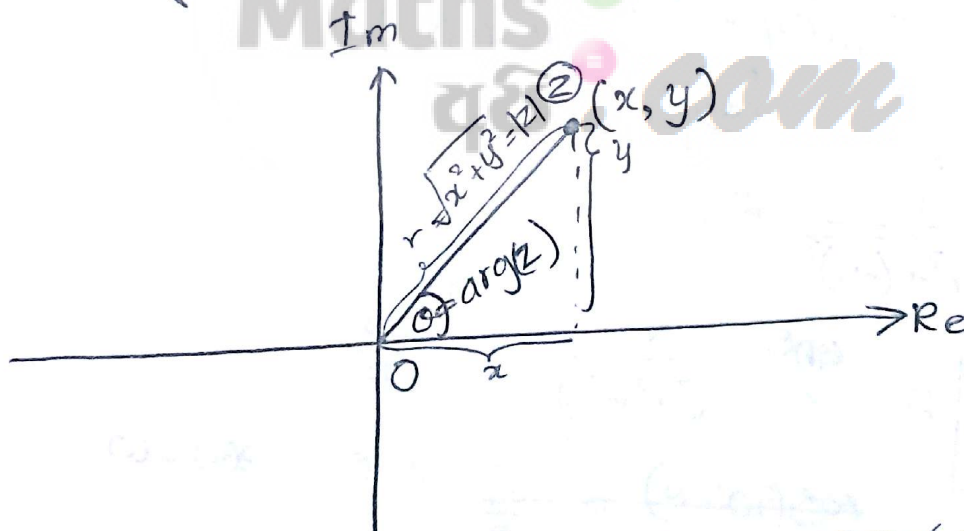
$$Z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_r \left\{ \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\cos \theta} + i \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\sin \theta} \right\}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{and} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$\therefore Z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_r \left\{ \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\cos \theta} + i \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\sin \theta} \right\}$$

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$



$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

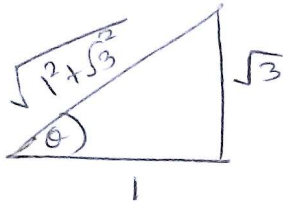
$$Z_4 = -1 - i\sqrt{3}$$

ചരിത്രം ഉള്ള ചില പ്രശ്നങ്ങൾ
രേഖപ്പെടുത്തുക

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \underbrace{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}_r \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}}_{\cos \theta} + i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} \right\}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} \text{ or,}$$



$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

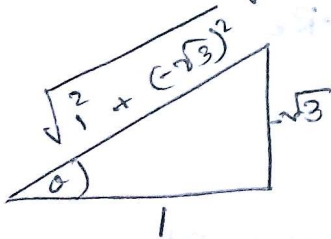
$$\theta = 60^\circ$$

$$Z_1 = 2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = \underbrace{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}_{r_2} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}}_{\cos \theta} + i \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} \right\}$$

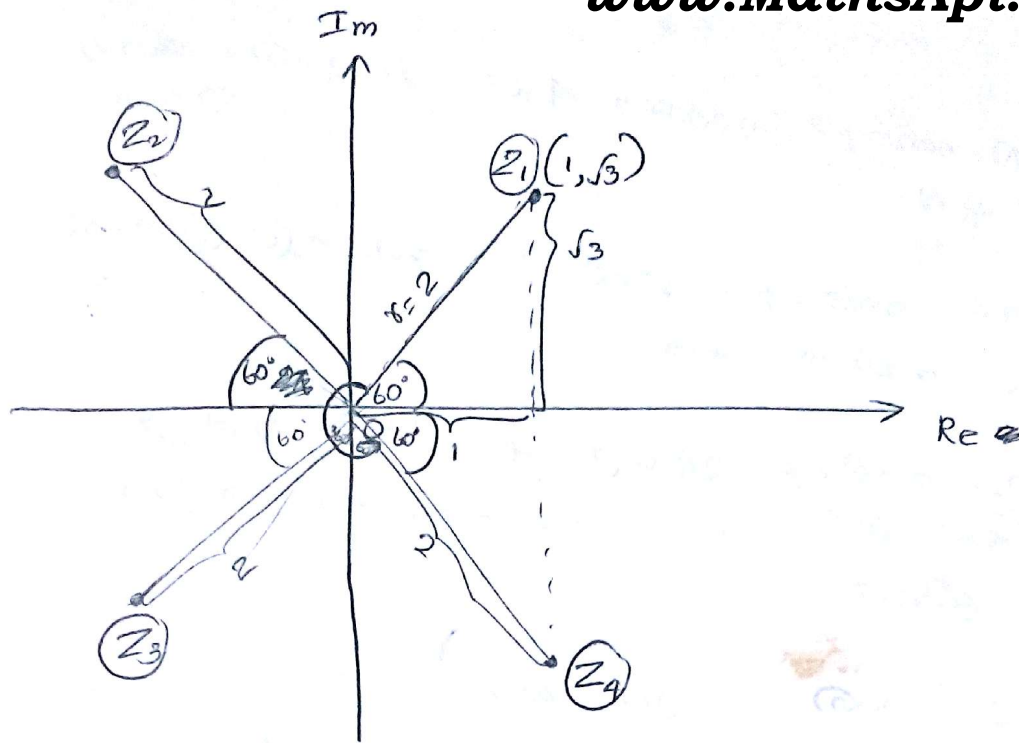
$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} \text{ or,}$$



$$\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \therefore \theta = 360^\circ - 60^\circ$$

$$Z_2 = 2 (\cos(360^\circ - 60^\circ) + i \sin(360^\circ - 60^\circ))$$



$$Z_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_3 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} + i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \right\}$$

$$= 2 \left(\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\cos \theta} + i \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sin \theta} \right)$$

$$\cos \theta < 0$$

$$\sin \theta > 0$$

පැහැදිලි කරන්න

$$Z_3 = 2 \left(\cos\left(180^\circ - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(180^\circ - \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$|Z| = 2 \quad \arg(Z) = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z_4 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_4 = (-1) + i(-\sqrt{3})$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} + i \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \right\}$$

$$= 2 \left\{ \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\cos \theta} + i \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sin \theta} \right\}$$

$$\cos \theta < 0$$

$$\sin \theta < 0$$

පැහැදිලි කරන්න

$$Z_4 = 2 \left[\cos(\pi + 60^\circ) + i \sin(\pi + 60^\circ) \right]$$

$$|Z| = 2, \quad \arg(Z_4) = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

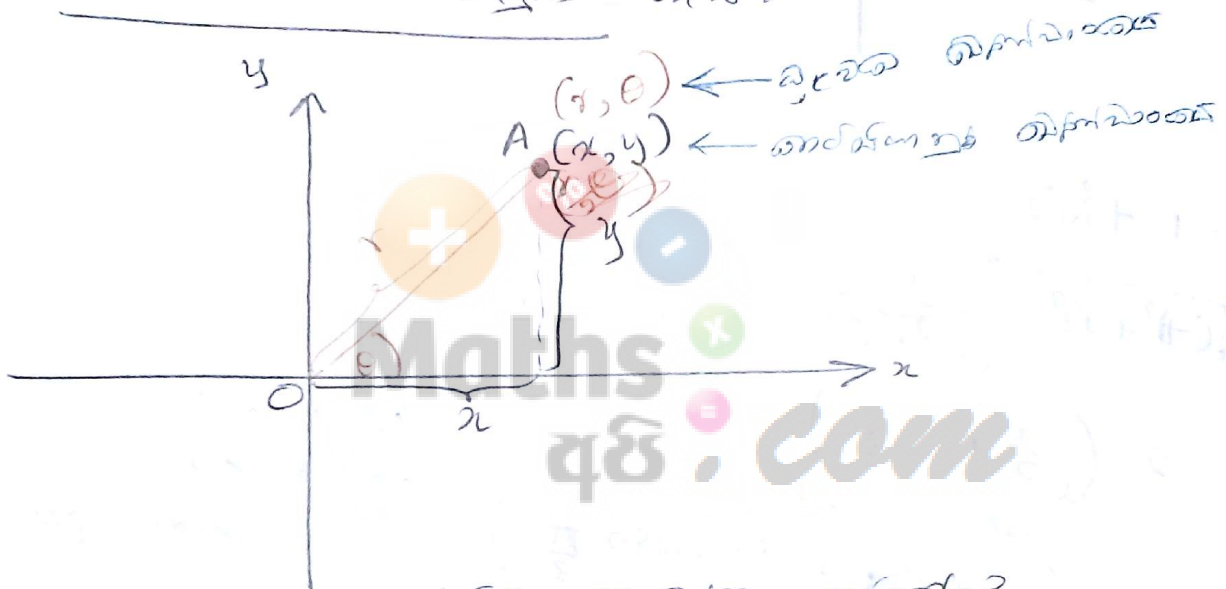
30/11/20

ഒരു ഹർമിറ്റിയൻ മാട്രിക്സ് A ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി
എന്നു.

$\therefore$ ഈ ഹർമിറ്റിയൻ മാട്രിക്സ് ന്റെ ഉൾക്കൊള്ളൽ
ഒരു യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ആണ്.

അതുകൊണ്ട് ഹർമിറ്റിയൻ മാട്രിക്സ് ന്റെ 2×2
വെക്ടറുകൾ യൂണിറ്ററി ആണ്. ഒരു ഹർമിറ്റിയൻ മാട്രിക്സ്
ന്റേ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി.

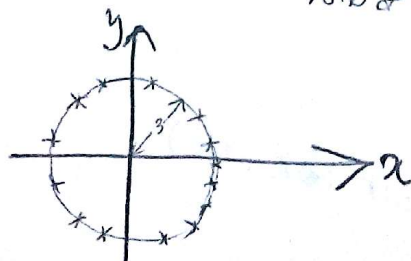
ഒരു യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി



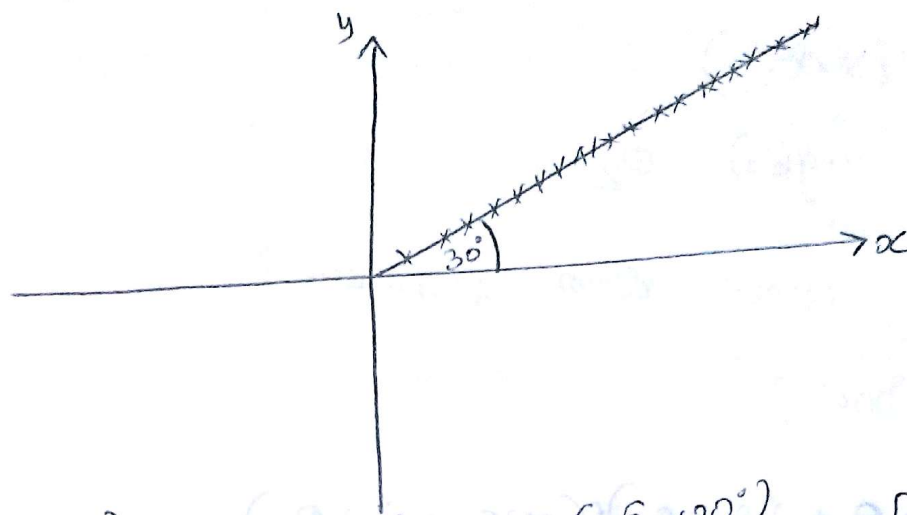
$r = 1$ (യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി)
 $\theta = 0$

• യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി
യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി.

അതുകൊണ്ട് യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി
യൂണിറ്ററി മാട്രിക്സ് ന്റെ ഖഗോളിക ജ്യാമിതി.



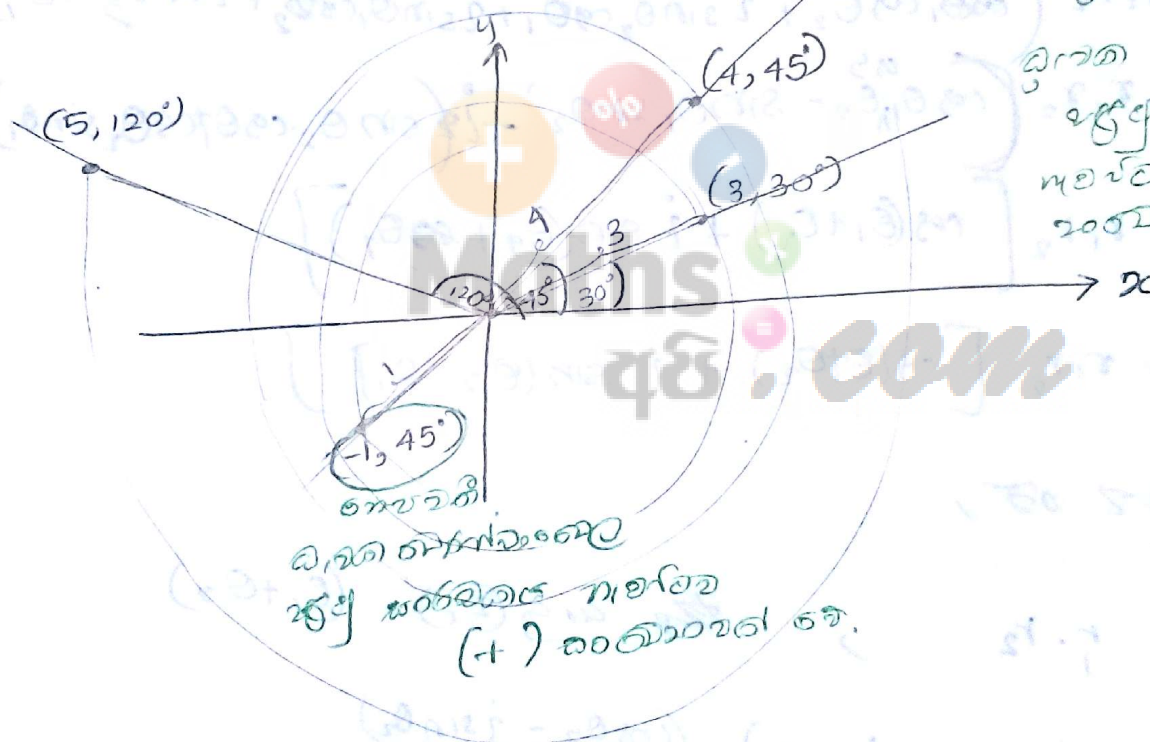
മിഥ്യയാധാരമായ ഒരു പ്രശ്നം. 30° ക്ക് x ന്റെ ചുരുക്കി തട്ടി
 രേഖാ രൂപം x അക്ഷത്തിൽ



$A(4, 45^\circ)$, $B(3, 30^\circ)$, $C(5, 120^\circ)$, $D(-1, 45^\circ)$

നോട്ട്.

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 നോട്ട് (+) നോട്ട്
 നോട്ട് നോട്ട്.



നോട്ട്.
 മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 (+) നോട്ട് നോട്ട്.

ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട് മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$|Z| = r \quad \arg(z) = \theta$$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട് ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട് ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്
 ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട് ചുരുക്കി തട്ടി നോട്ട്

$$\textcircled{1} \quad z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$|z_1| = r_1, \quad \arg(z_1) = \theta_1$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$|z_2| = r_2, \quad \arg(z_2) = \theta_2$$

$z_1 \neq z_2$ ට $\frac{z_1}{z_2}$ යුතු ක්වණි පිටුපසින්?

මෙයින් m තිබේ?

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1))$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = z \text{ යනු,}$$

$$|z| = r_1 \cdot r_2, \quad \arg(z) = (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}$$

$$= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2)}$$

$$= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2))}{r_2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg(z_1/z_2) = (\theta_1 - \theta_2) //$$

NAME _____ @_നമ്മുടെ പരീക്ഷ

$$|Z_1 Z_2| = r_1 r_2$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2|$$

$$** \arg(Z_1 Z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

$$\arg(Z_1 Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം!!!

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}$$

$$** \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

② $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ എന്ന് എഴുതാം

$$|Z| = r, \arg(Z) = \theta$$

Z^2, Z^3, Z^4 എന്നിവയുടെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക

$$Z^2 = Z \cdot Z$$

$$|Z^2| = |Z \cdot Z| = |Z| \cdot |Z| = r \cdot r = r^2$$

$$\arg(Z^2) = \arg(Z \cdot Z) = \arg(Z) + \arg(Z) = \theta + \theta = 2\theta$$

$$Z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z$$

$$|z^3| = |z^2 \cdot z| = |z^2| \cdot |z| = r^2 \cdot r = r^3$$

$$\arg(z^3) = \arg(z^2) + \arg(z)$$

$$= 2\theta + \theta$$

$$\arg(z^3) = 3\theta$$

$$z^2 = z \cdot z$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r^2 (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$= r^2 (\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta + i^2 \sin^2 \theta)$$

$$= r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta)$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$|z^2| = r^2$$

$$\boxed{|z^2| = |z|^2}$$

$$\arg(z^2) = 2\theta$$

$$\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$$

$$\log_a r^m = m \log_a r$$

$$z^3 = z^2 \cdot z$$

$$= r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r^3 [\cos 2\theta \cos \theta + i \sin 2\theta \cos \theta + i \sin 2\theta \sin \theta + i^2 \sin 2\theta \sin \theta]$$

$$= r^3 [\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta + i (\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta)]$$

$$= r^3 [\cos (2\theta + \theta) + i \sin (\theta + 2\theta)]$$

$$\underline{\underline{z^3 = r^3 [\cos 3\theta + i \sin 3\theta]}}$$

$$|z^3| = r^3$$

$$|z^3| = |z|^3$$

$$\arg(z^3) = 3 \arg(z)$$

അതേ രീതിയിൽ!

$$\begin{aligned} z^4 &= z^3 \cdot z \\ &= r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \cdot r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^4 (\cos 3\theta \cos \theta + i \sin 3\theta \cos \theta + i \sin 3\theta \sin \theta + i^2 \sin 3\theta \sin \theta) \\ &= r^4 (\cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta + i (\sin 3\theta \cos \theta + \cos 3\theta \sin \theta)) \\ &= r^4 (\cos(3\theta + \theta) + i \sin(3\theta + \theta)) \end{aligned}$$

$$z^4 = r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$$|z^4| = r^4 = |z|^4$$

$$\arg(z^4) = 4\theta = 4 \arg(z)$$

③ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ അകർഷണ ശക്തിയുള്ളതല്ല.
 iz അകർഷണ ശക്തിയുള്ളതല്ല. ഇതിനെ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം നൽകാം.
 z, iz അകർഷണ ശക്തിയുള്ളതല്ല. ഇതിനെ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം നൽകാം.
 ഇതിനെ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം നൽകാം.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$iz = r i (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r (i \cos \theta + i^2 \sin \theta)$$

$$= r (i \cos \theta - \sin \theta)$$

$$= r (i \sin(\pi/2 - \theta) - \cos(\pi/2 - \theta))$$

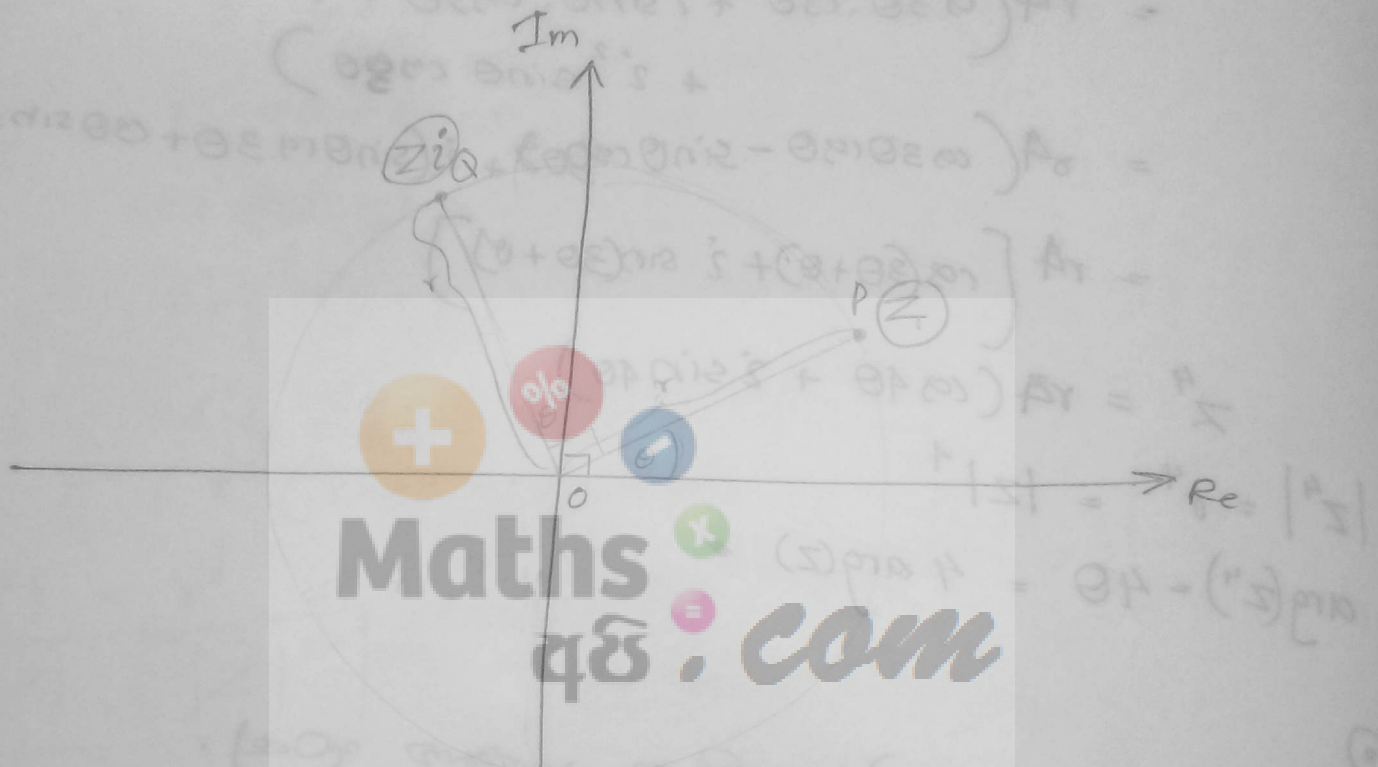
$$iz = r [-\cos(\pi/2 - \theta) + i \sin(\pi/2 - \theta)]$$

$$iz = r \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) \right]$$

$$iz = r \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right]$$

$$|iz| = r \quad \arg(iz) = \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$|z| = r \quad \arg(z) = \theta$$



z , iz അകീർത്ത ഘടകങ്ങൾക്ക് 90° കോണിലായി മാറുന്നു. z ന്റെ r ഉം iz ന്റെ r ഉം തുല്യമാണ്.

z അകീർത്ത ഘടകങ്ങൾക്ക് 90° കോണിലായി മാറുന്നു. OP ന്റെ z ന്റെ 90° കോണിലായി മാറുന്നു. iz ന്റെ z ന്റെ 90° കോണിലായി മാറുന്നു.

$$Z_1 = x_1 + iy_1$$

$$|Z_1| = |x_1 + iy_1|$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$Z_1 + Z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$Z_1 + Z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$x_1, x_2 > 0 \text{ ന്റെ,}$$

$$x_1 + x_2 = x_0 \text{ ന്റെ}$$

$$x_1, x_2 < 0 \text{ ന്റെ,}$$

$$x_1 + x_2 = x_0 \text{ ന്റെ}$$

$$x_1 > 0, x_2 < 0 \text{ ന്റെ}$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$$

അതുകൊണ്ട് അതുകൊണ്ട്

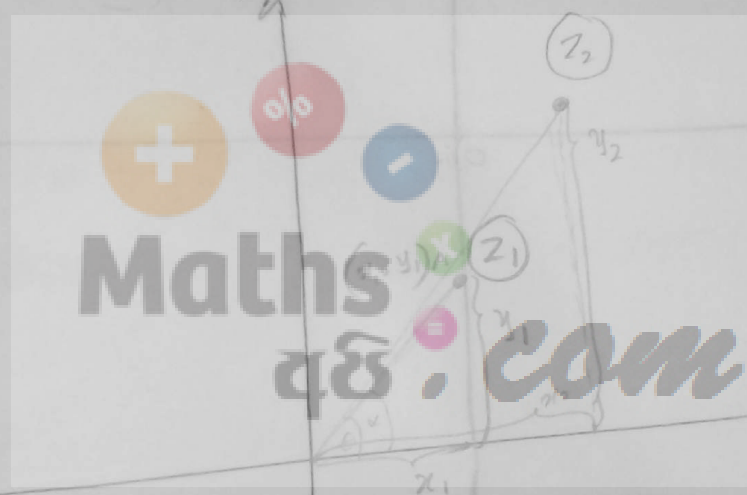
$Z_1 + Z_2$ അതുകൊണ്ട് അതുകൊണ്ട്

അതുകൊണ്ട്

$Z_1, Z_2, Z_1 + Z_2$ അതുകൊണ്ട് അതുകൊണ്ട്

അതുകൊണ്ട് അതുകൊണ്ട്

അതുകൊണ്ട്



$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \text{ ന്റെ}$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} < \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \text{ ന്റെ.}$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \text{ ന്റെ}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_1 + y_2} + \frac{x_2}{y_1 + y_2}$$

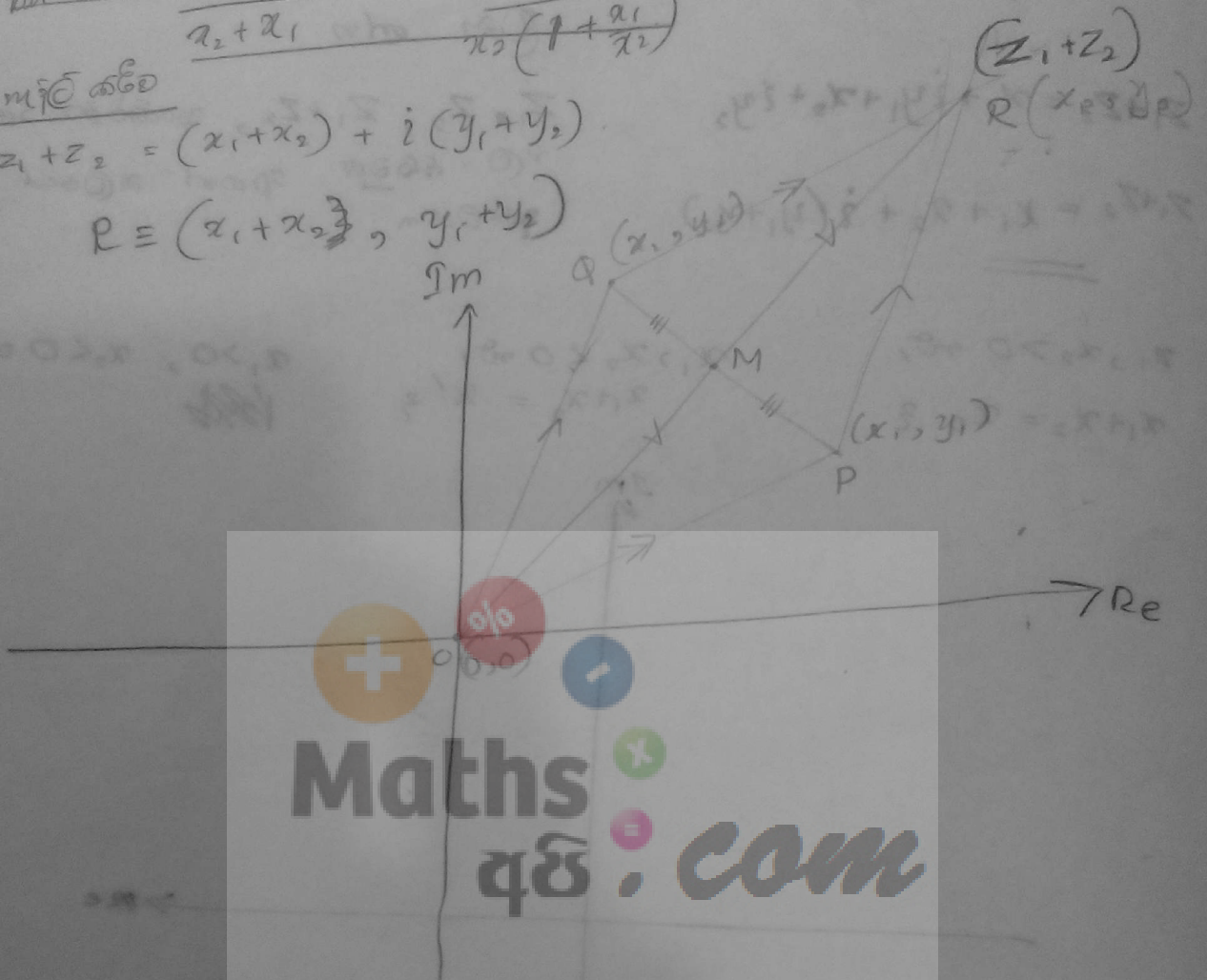
$$\tan \theta = \frac{y_2}{x_2} \quad \tan \alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\tan r = \frac{y_1 + y_2}{x_2 + x_1} = \frac{y_2 \left(\frac{y_1}{y_2} + 1 \right)}{x_2 \left(1 + \frac{x_1}{x_2} \right)}$$

අග්‍රික කිරීම

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$R \equiv \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2 \right)$$



කර්මාන්තය - OP, OQ අඩු ව පාද වන ඛණ්ඩාංකයන් ගන්න
කිරීම R ලෙස ගනිමු.

OP, OQ → OP, OQ නිමා කිරීමේදී කර්මාන්තය
සමාන වන ලෙස M ලෙස ගනිමු.

කර්මාන්තය සමාන වනු ඇත.

M ලෙස ගත් දිශානතිය ගම්බිල්ලා නම් කරමු Z_M ලෙස ගනිමු.

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$Z_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + i \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

R හි සෑම ලක්ෂණයම අවබෝධ කරගන්න

R හි සෑම ලක්ෂණයම අවබෝධ කරගන්න $(x_R, y_R) \in \mathbb{C}$ වන විට

$$Z_R = x_R + iy_R$$

$$x_M = \frac{x_R + 0}{2}$$

$$y_M = \frac{y_R + 0}{2}$$

$$x_R = x_1 + x_2$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_R}{2}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_R}{2}$$

$$y_R = y_1 + y_2$$

$$x_R = x_1 + x_2$$

$$R = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$Z_R = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$Z_R = Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

∴ R හි සෑම ලක්ෂණයම අවබෝධ කරගන්න

Maths

api.com

$Z_1 + Z_2$ වේ.

OP, OP

$Z_1 + Z_2$

සමාන

සමාන

මගින්

අවබෝධ කරගන්න

අවබෝධ කරගන්න

අවබෝධ කරගන්න

අවබෝධ කරගන්න

අවබෝධ කරගන්න

$Z = x + iy$ $-Z$ කිසිදු අංකයක් Z හි x සහ y අංක 180° කින් පරිවර්තනය කරයි.
 Z සහ $-Z$ අතර 180° කිසිදු අංකයක් Z හි x සහ y අංක 180° කින් පරිවර්තනය කරයි.

$$Z = x + iy \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

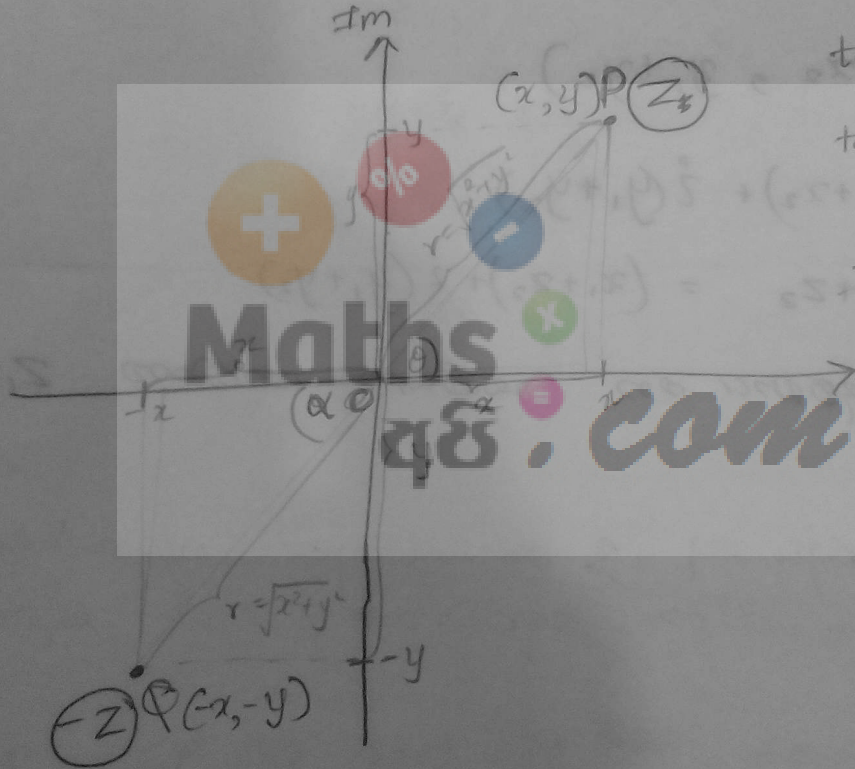
$$-Z = -(x + iy)$$

$$-Z = -x - iy$$

$$-Z = (-x) + i(-y) \quad |-Z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Z



$$\tan \alpha = \frac{-y}{-x}$$

$$\tan \theta = \tan \alpha$$

$$\theta = \alpha$$

P, O, Q එක රේඛයක පිහිටයි.

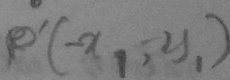
Z සහ $-Z$ අතර 180° කිසිදු අංකයක් Z හි x සහ y අංක 180° කින් පරිවර්තනය කරයි.
 $|Z| = |-Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Z සහ $-Z$ අතර 180° කිසිදු අංකයක් Z හි x සහ y අංක 180° කින් පරිවර්තනය කරයි.

මෙම අවස්ථාවේ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ වේ.

Z_1 & Z_2 അകീർണ്ണ അതിരുകൾ P & Q രേഖയ്ക്ക്
 സമാന്തരമാണ്. $Z_1 - Z_2$ അകീർണ്ണ അതിരുകൾ P & Q
 രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമാണ്.

$$Z_1 - Z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$

सर्व द्विगुण चरों पर
 $R = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

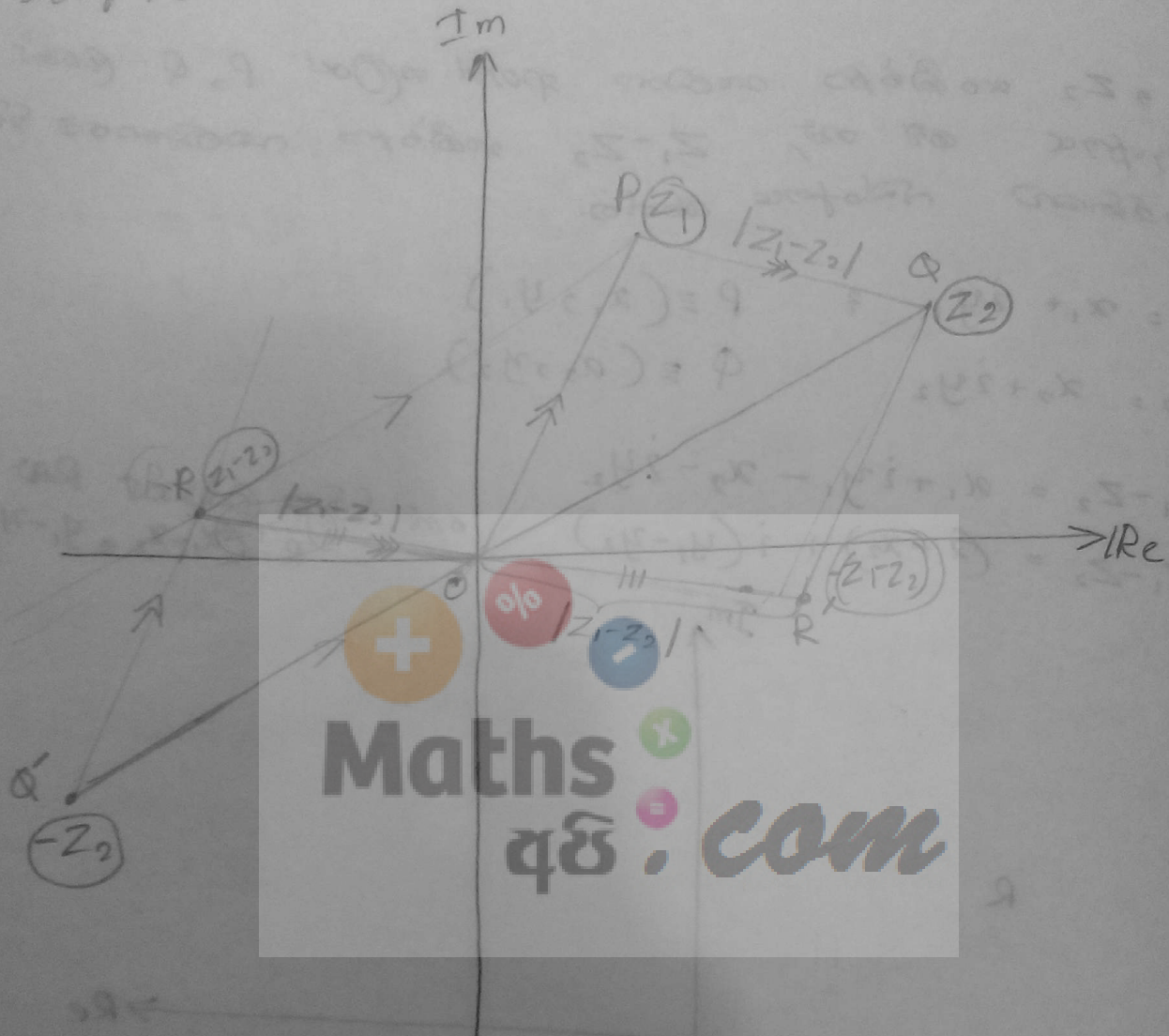


Prin QED $M \equiv \left(\frac{x_0 - x_1}{2}, \frac{y_0 - y_1}{2} \right)$

0 m R എന്ന M b

$$R \equiv (x_R +$$

ചെറുതാ



കുറച്ചുകൾ

മുഖ്യമായും OP കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം $OP = OQ'$ ന്ന വെട്ടിച്ച് Q' കണ്ടെത്തുക. $-Z_2$ ന്റെ കോർഡിനേറ്റുകൾ ഉപയോഗിച്ച് Q' കണ്ടെത്തുക.

OP ന്ന OQ' കൂട്ടിയാൽ $Z_1 + (-Z_2)$ ന്റെ കോർഡിനേറ്റുകൾ കണ്ടെത്തുക. OR ന്റെ നീളം $|Z_1 - Z_2|$ ആകും.

ഒരു വൃത്തം R ന്റെ R കേന്ദ്രത്തിൽ $Z_1 - Z_2$ ന്റെ കോർഡിനേറ്റുകൾ കണ്ടെത്തുക.

$$OR = |Z_1 - Z_2|$$

പ്രദേശം അതിർത്തി.

$$\therefore \mathcal{O}\Phi' = \mathbb{R}P$$

$$\phi \circ \phi = \phi \circ \phi'$$

$$\therefore OQ = RP$$

$$OQ' \parallel RP \quad \therefore OQ \parallel RP$$

0QPR ২৭৬৭৫ ২০০৫

OPQR എന്നെങ്കിലും ചിത്രം

$$\therefore PQ = OR$$

$$\therefore PQ = |z_1 - z_2|$$

$RO = OR'$
 $R' = (Z_1 - Z_2)$
 $R = (Z_2 - Z_1)$

RR' ന്റെ മധ്യം.

[illegible]

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$-Z$ ക്രമം ഒരു തുല്യമാ? $Z, -Z$ എന്നിവയുടെ

$$-Z = -r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

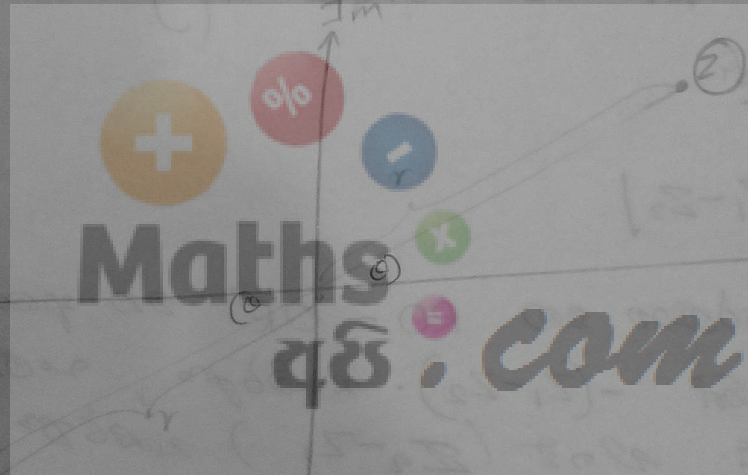
$$-Z = r(-\cos \theta + i(-\sin \theta))$$

$$-Z = r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$$

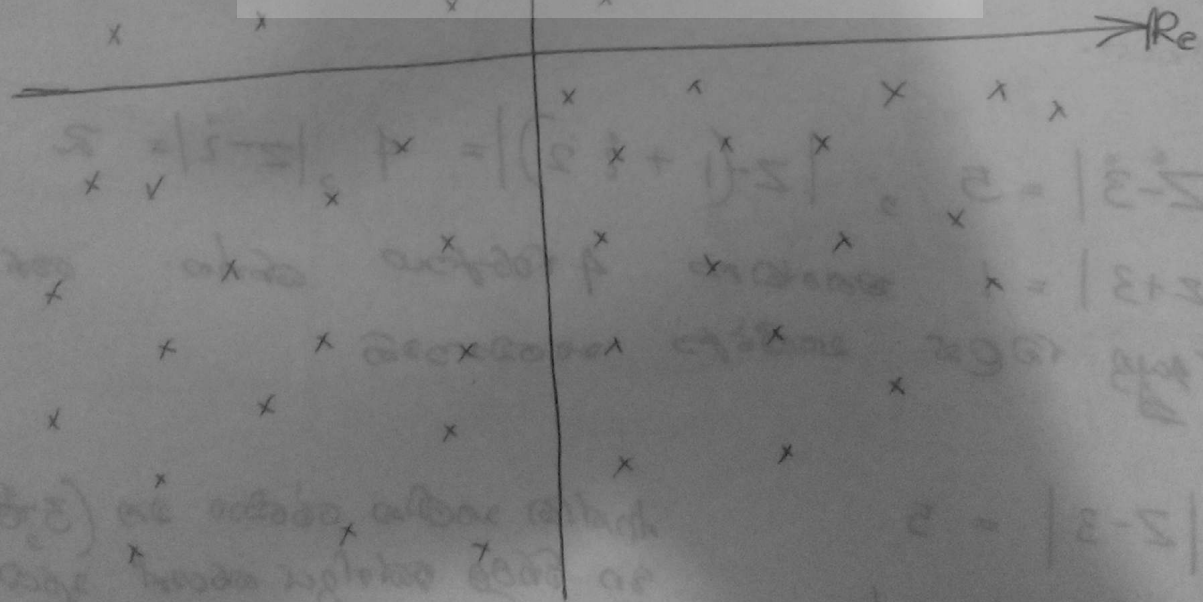
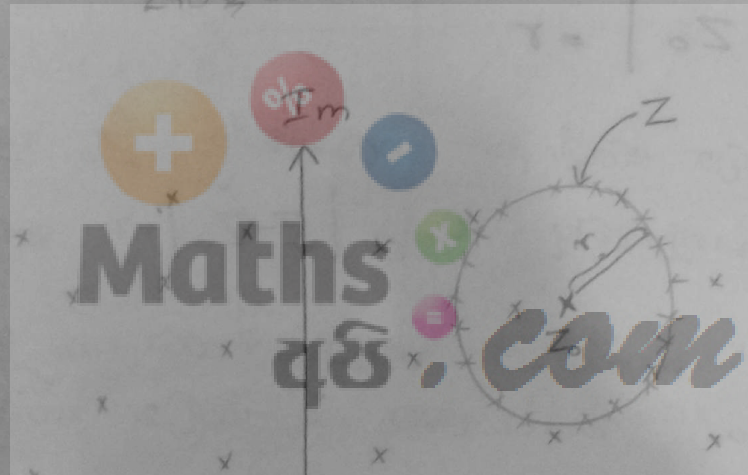
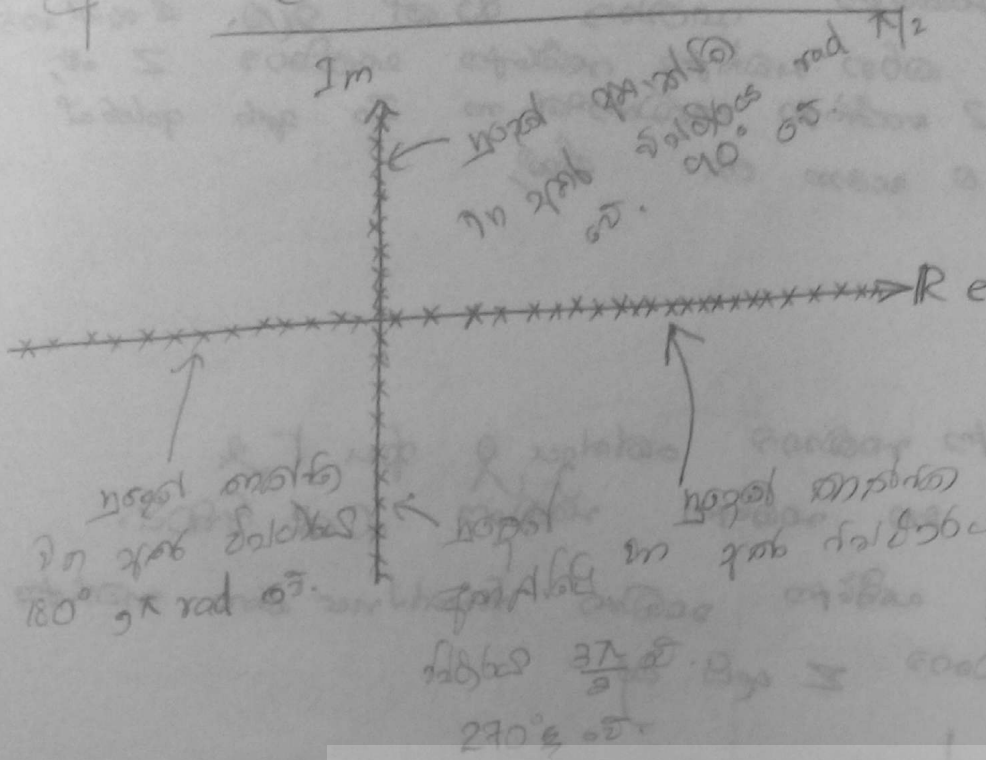
$$|-Z| = r$$

$$\arg(-Z) = (\pi + \theta)$$

$|Z| = r$, $Z, -Z$ തുല്യമാണ് r ന്റെ മൂല്യം
 $\arg(Z) = \theta$ ഉൾപ്പെടെ.



എന്ന തരം വെക്ടറുകൾ 2π ന്റെ നൂറു



$$|Z - Z_0| = r$$

Z_0 എന്ന വെക്ടർ r ന്റെ നൂറു

എന്ന വെക്ടർ r ന്റെ നൂറു

අපට දුන් ඡේදන මගින් Z_0 හි ඇති අර්ධ ඛණ්ඩය
 තීරස්ථාන හා අර්ධස්ථාන අඩංගු වන Z හි
 අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය Z හි
 වල ඇති අර්ධ ඛණ්ඩය Z_0 අර්ධ ඛණ්ඩයක්
 ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය.

Z_0 අර්ධ ඛණ්ඩය අඩංගු වන Z හි
 අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය
 වල ඇති අර්ධ ඛණ්ඩය Z_0 අර්ධ ඛණ්ඩයක්
 ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය.

$$|Z - Z_0| = r$$

Z හි ඇති අර්ධ ඛණ්ඩය Z_0 හි ඇති
 අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය
 $|Z - Z_0| = r$ ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය.

Z_0 අර්ධ ඛණ්ඩය Z හි ඇති
 අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය
 $|Z - Z_0| = r$ ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය.

$$|Z - 3| = 5, |Z - (1 + i2)| = 4, |Z - i| = 2$$

$|Z + 3| = 1$ ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය
 Z හි ඇති අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය.

$$|Z - 3| = 5$$

$$|Z - (3 + i0)| = 5$$

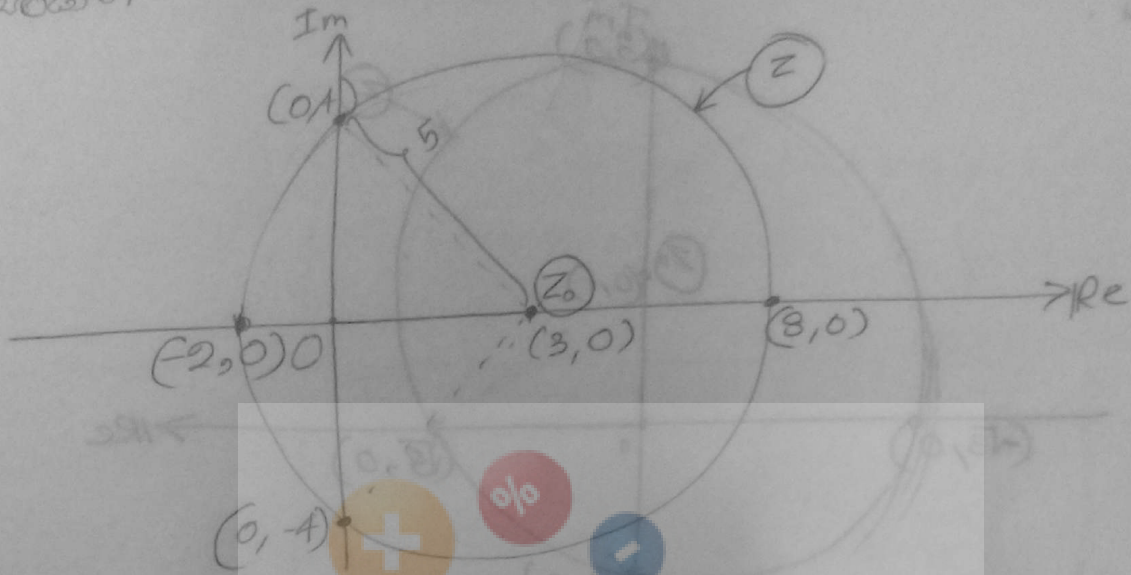
ආශ්වාත අර්ධ ඛණ්ඩයක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන අර්ධ ඛණ්ඩය
 වල ඇති අර්ධ ඛණ්ඩය Z_0 අර්ධ ඛණ්ඩයක්

$$r = |Z - Z_0|$$

$$|z-3| = 5$$

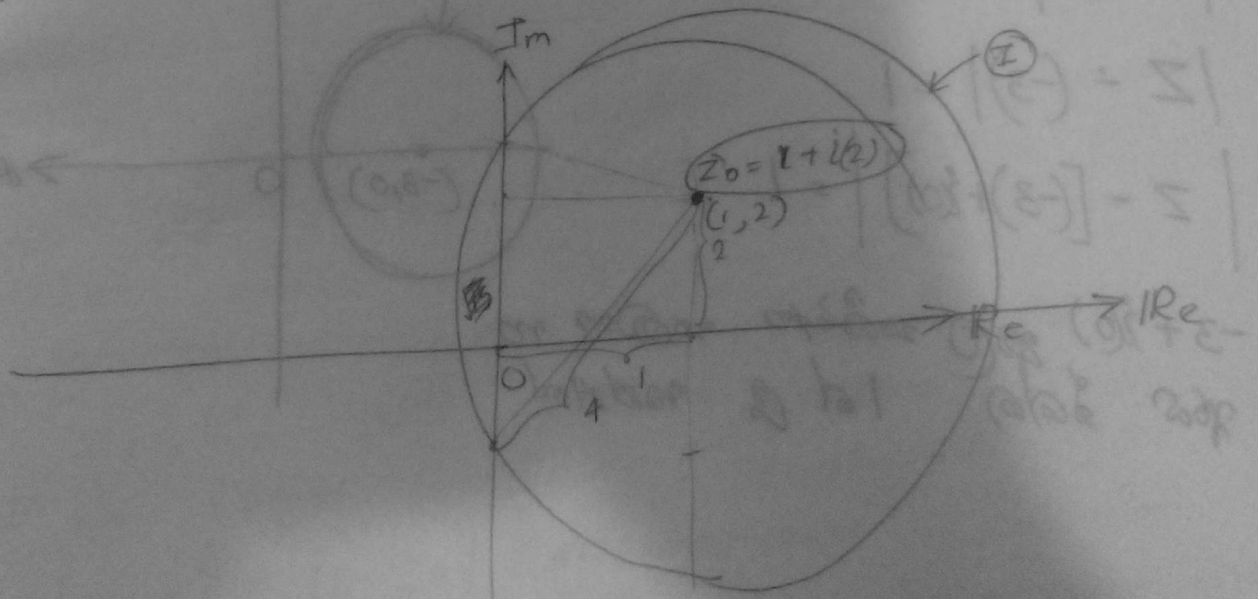
$$|z-(3+i0)| = 5$$

3+i(0) නිශ්චල ලක්ෂ්‍යයක් වන අතර ඒ සිට Z හි ස්ථානය 5 ක් වන බැවින් Z හි ස්ථාන සියලුම ලක්ෂ්‍යයන් (Z) 3 හි ස්ථාන සියලුම ලක්ෂ්‍යයන් (Z) සිට 5 ක් වන ලක්ෂ්‍යයන් වේ.



$$|z-(1+i2)| = 4$$

1+i(2) නිශ්චල ලක්ෂ්‍යයක් වන අතර ඒ සිට Z හි ස්ථානය 4 ක් වන බැවින් Z හි ස්ථාන සියලුම ලක්ෂ්‍යයන් (Z) 1+i(2) හි ස්ථාන සියලුම ලක්ෂ්‍යයන් (Z) සිට 4 ක් වන ලක්ෂ්‍යයන් වේ.

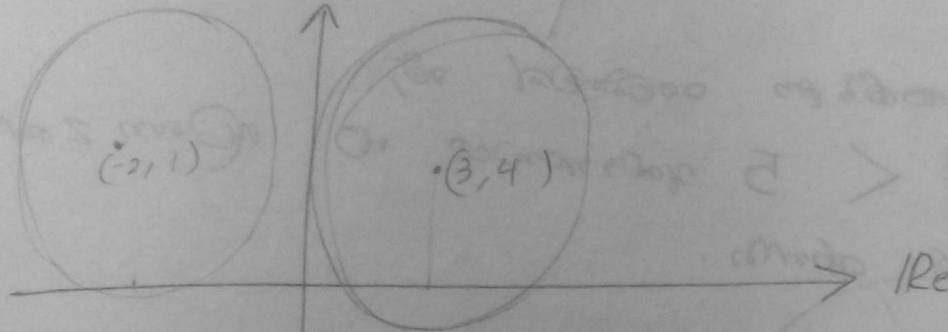


Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$|Z - (3 + 4i)| = |Z - (2 + i)| \quad \text{പരികല്പന}$$

$$|Z - (3 + 4i)| = |Z - (2 + i(1))| = r$$

$(3 + 4i)$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം

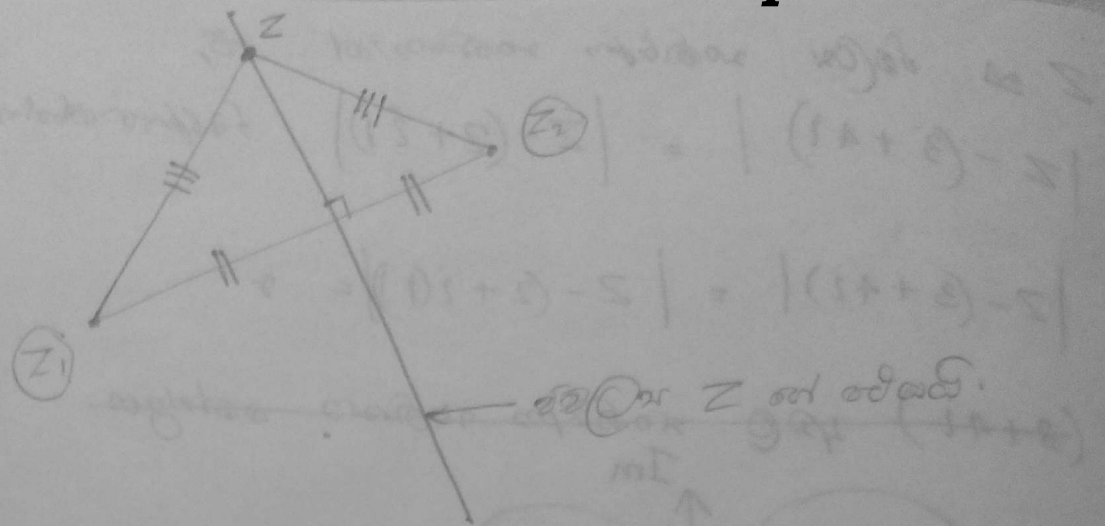


$3 + 4(i)$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $2 + i(1)$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം

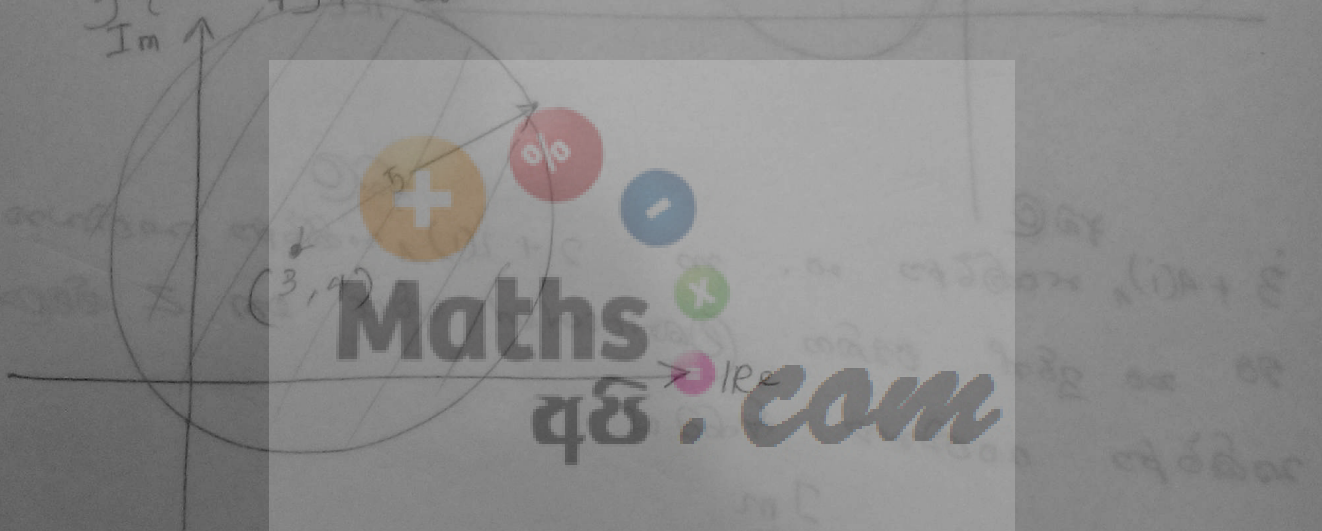
ഉദാഹരണം

$3 + 4i$ ന്റെ $2 + i(1)$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം

ഉദാഹരണം Z_1, Z_2 ന്റെ സമീപത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം Z എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം



Z හි පිහිටීම සාපේක්ෂව සැලකීමේදී,
 $|Z - (3 + i4)| < 5$ ලෙස සලකා බැලිය හැක. මෙය මූලාශ්‍රය Z හි
 පිහිටීම පිළිබඳව සඳහන් කරයි.



21) P_1, P_2 രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ Z_1, Z_2 യുടെ വെക്ടറുകൾ ആണെന്ന് കരുതുക.
 $|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$ ആണെന്ന്, $\angle P_1 O P_2 = 90^\circ$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

22) $\arg(z-2) = \frac{\pi}{3}$ ആണെന്ന്, Z യുടെ വെക്ടർ രേഖ P യിൽ കേന്ദ്രമായുള്ളതാണെന്ന്, P യുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

23) $\arg(z+4+3i) = \frac{\pi}{6}$ ആണെന്ന് Z യുടെ വെക്ടർ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?

24) $\arg(z-1+2\sqrt{3}i) = \frac{2\pi}{3}$ ആണെന്ന് Z യുടെ വെക്ടർ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?

- Z യുടെ വെക്ടർ രേഖ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?
- Z യുടെ വെക്ടർ രേഖ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?
- $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?
- $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ ആണെന്ന് $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?

25) $|z+4| = 3$ ആണെന്ന് Z യുടെ വെക്ടർ രേഖ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?

$$|z - (-4+i0)| = 3$$

$-4+i0$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ z യുടെ വെക്ടർ രേഖ $|Z|$ യുടെ വലുപ്പം എത്ര?

26) $|z - 4+4i| = 2\sqrt{2}$ ആണെന്ന് Z യുടെ വെക്ടർ $\arg(z)$ കണ്ടെത്തുക, എത്ര?

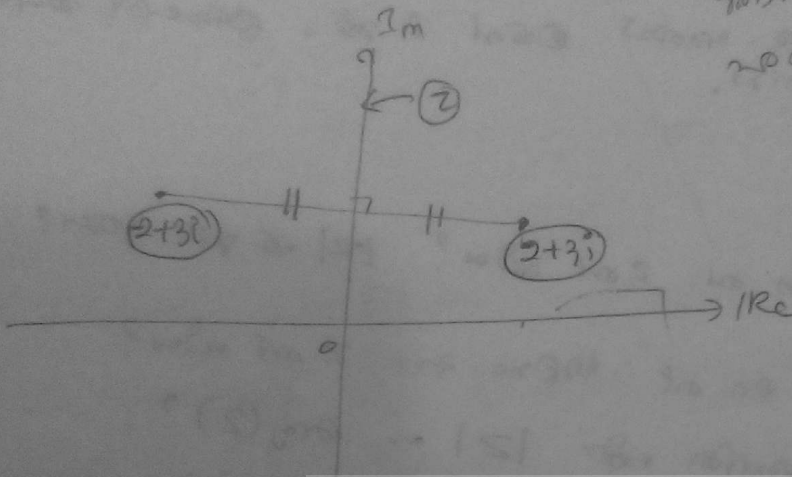
- മുകളിൽ $-\frac{5\pi}{12} \leq \arg(z) \leq -\pi/12$ ആണെന്ന് എത്ര?
- $|z|$ യുടെ വെക്ടർ $\arg(z)$?
- $|z+1|$ യുടെ വെക്ടർ എത്ര?

27) P യുടെ വെക്ടർ രേഖ Z യുടെ വെക്ടർ രേഖ $\arg\left(\frac{z-2}{z+3}\right) = \pi/4$ ആണെന്ന് Z യുടെ വെക്ടർ എത്ര?

(28) $|z+2-3i| = |z-2-3i|$...

$|z-(2+3i)| = |z-(2+3i)|$

... $-2+3i$... $2+3i$...



(29) ... $\frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{6}$...

$\arg(z+4+4i) \leq \pi/6$...

2012/12/7

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{or} \quad re^{i\theta} \quad \text{or} \quad re^{i\theta} \quad \text{or} \quad re^{i\theta}$$

~~$|z| = r, \arg(z) = \theta$~~

$$iZ = i8 (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$iz = r(i \cos \theta + i^2 \sin \theta)$$

$$iz = r(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

$$iz = r \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right)$$

$$iz = r \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right)$$

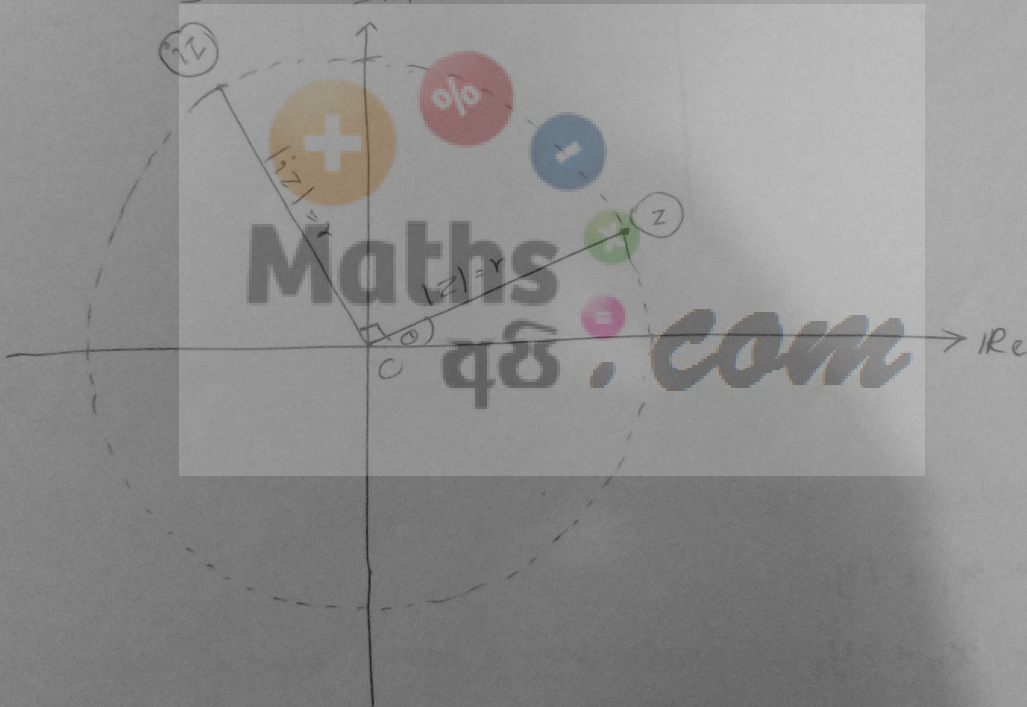
~~$|iz| = r, \arg(iz) = \frac{(\pi/2 + \theta)}{2\pi}$~~

$$|Z| = r$$

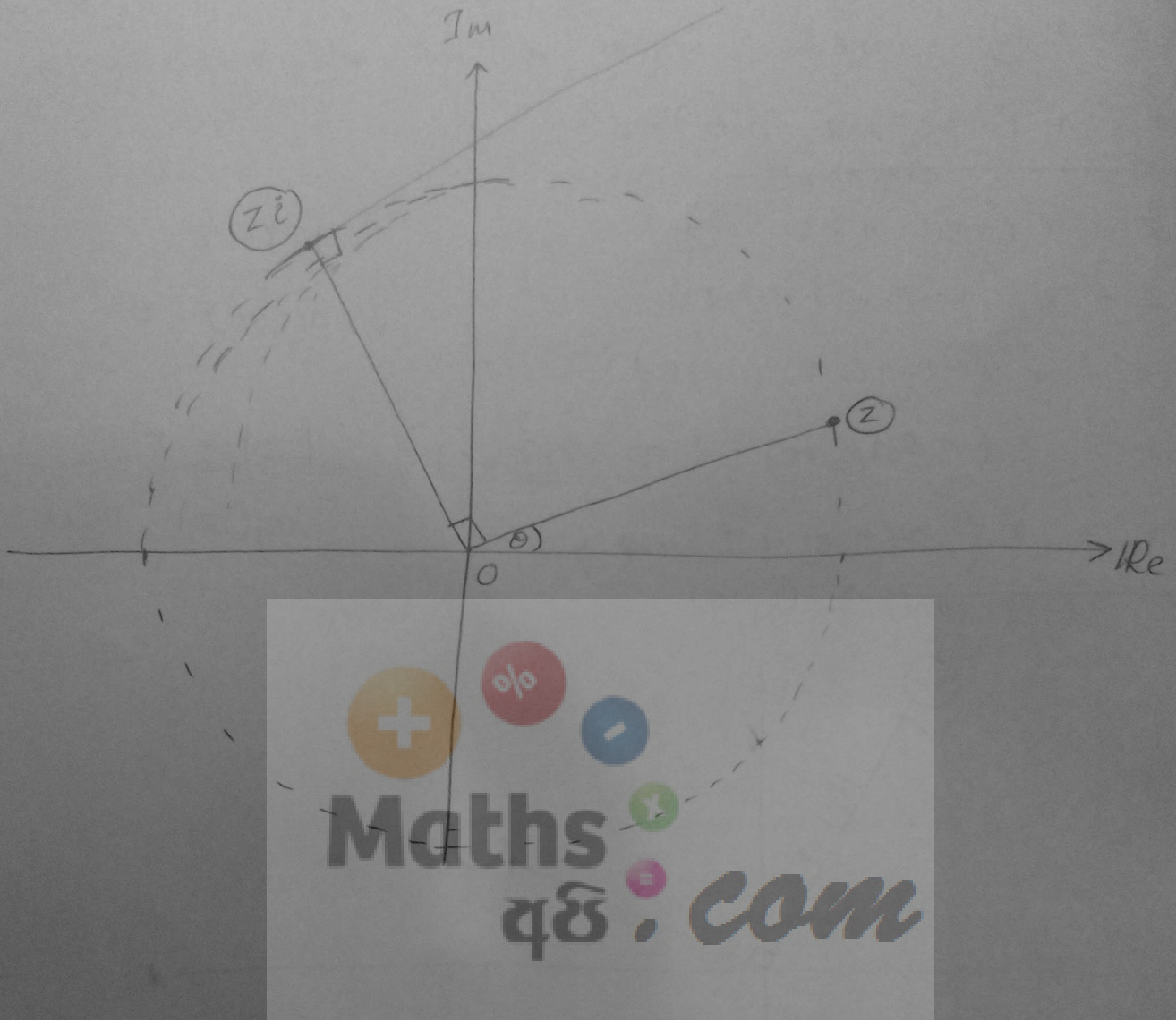
$$\arg(z) = \theta$$

$$|iz| = r$$

$$\arg(iz) = 90^\circ + \theta$$



$|2+3-2i| = |2-2-3i|$...

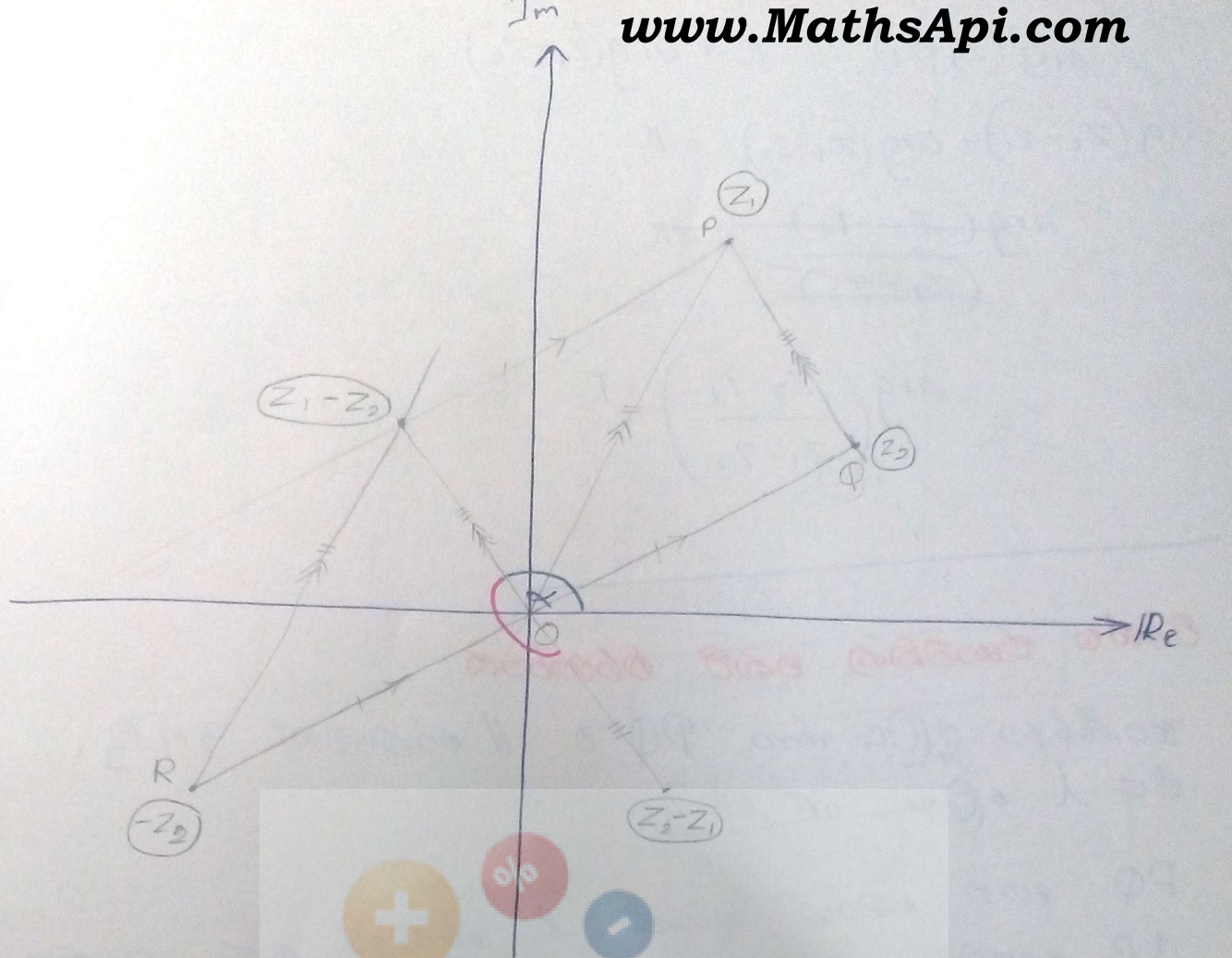


വിശദീകരിക്കുക

$$Z_1 = x_1 + iy_1$$

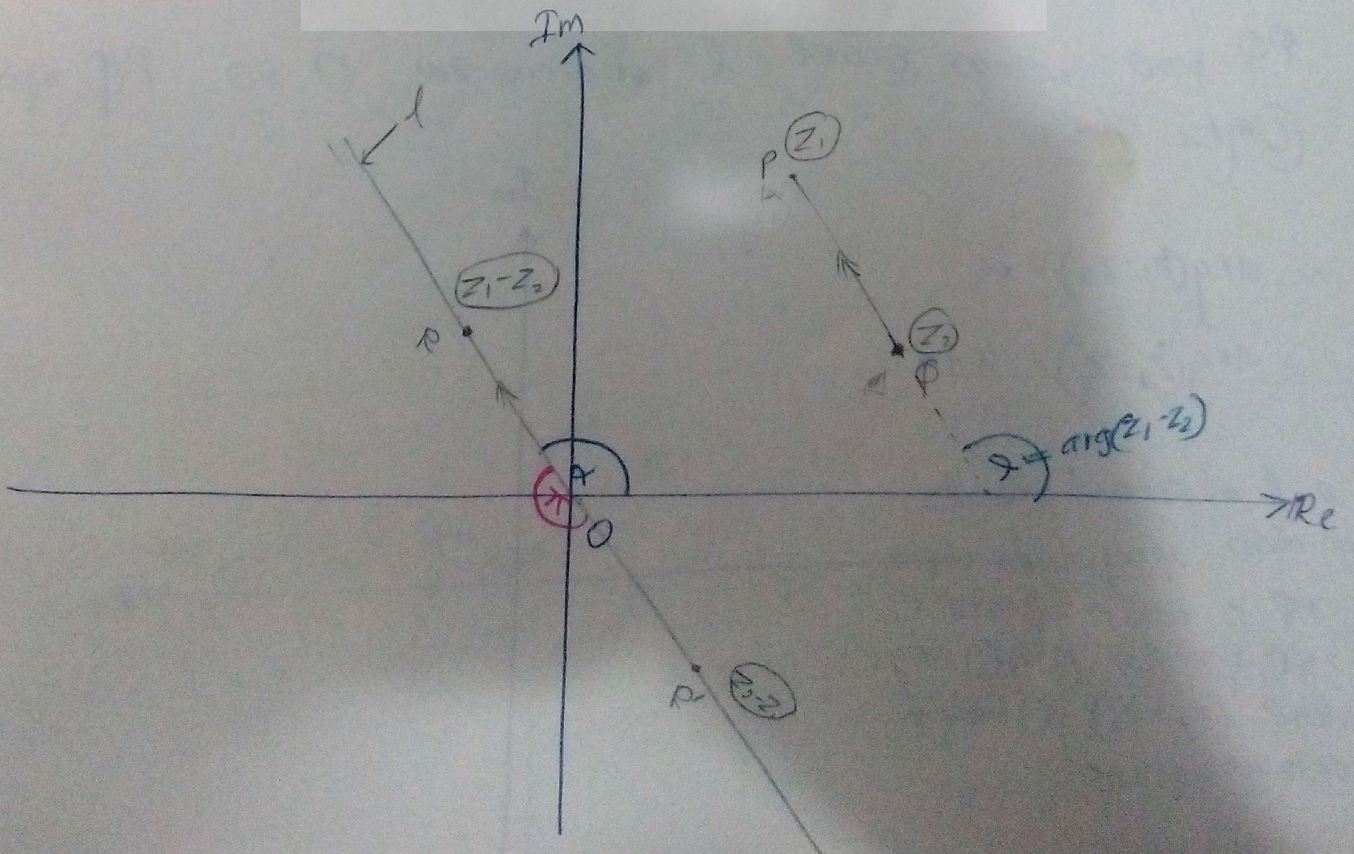
$$Z_2 = x_2 + iy_2$$

... $Z_1 + Z_2$...



$$\arg(z_1 - z_2) = \alpha \quad \text{--- (1)} \quad \arg(z_2 - z_1) = 180^\circ + \alpha \quad \text{--- (2)}$$

ഇങ്ങനെയ്തതെ കേൾ കർത്താവായ



①, ② of

$$\arg(z_2 - z_1) = \pi + \arg(z_1 - z_2)$$

$$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_1 - z_2) = \pi$$

$$\frac{\arg(z_2 - z_1)}{\arg(z_1 - z_2)} = \pi$$

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2}\right) = \pi$$

විශේෂ ඵලාභිතිව කෙටි කරන්න

සංකීර්ණ මූලයක් PQ ට $\parallel$ රේඛාවක් ඇතිවේ.
එය $\perp$ ලෙස තීරණය වේ.

PQ දිගේ යන දිශාවේ දී $\arg(z_1 - z_2)$ රේඛාවේ දිශාව 0 හෝ
 QP දිශාවේ දී $\arg(z_2 - z_1)$ රේඛාවේ දිශාව 0 හෝ

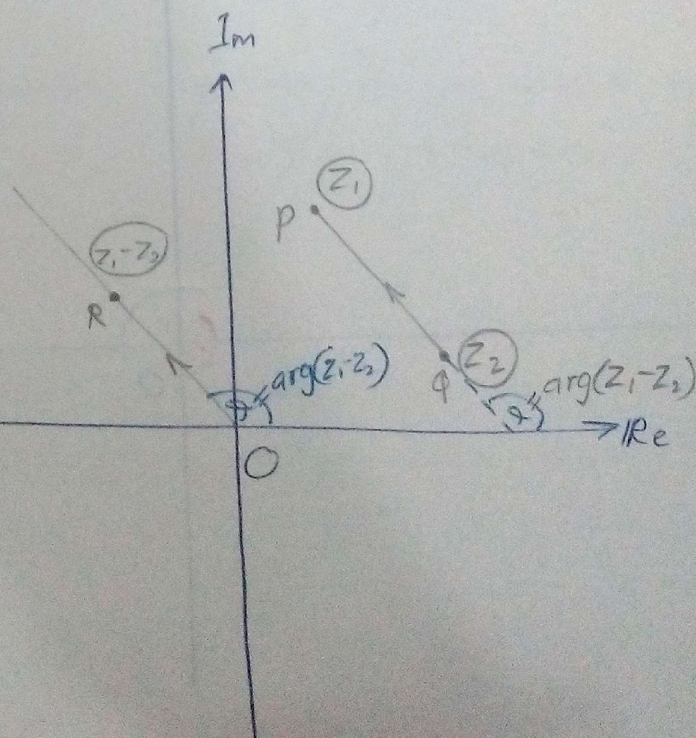
R ලක්ෂ්‍යය වෙත z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන් තීරණය
කරන්න.

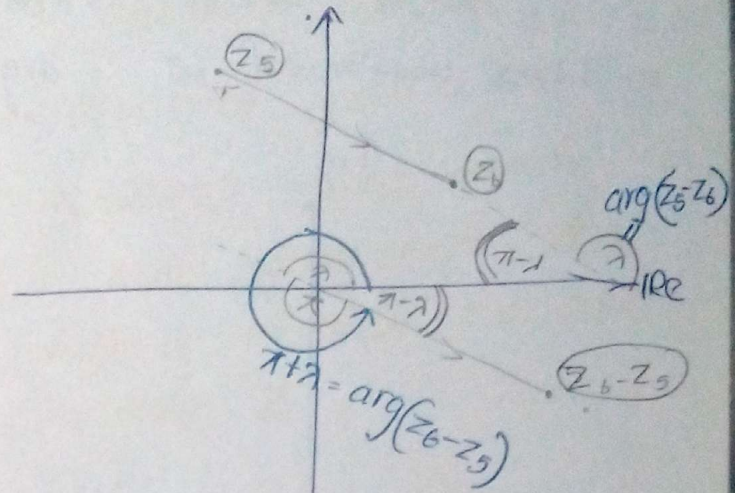
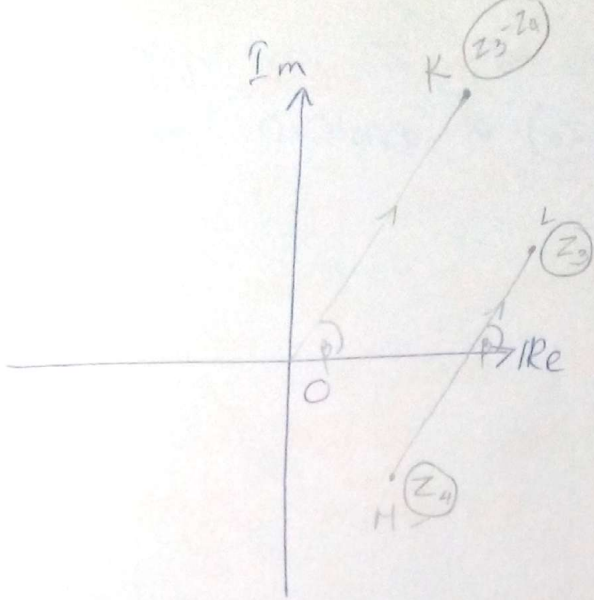
PQ දිගේ යන දිශාවේ දී $\arg(z_1 - z_2)$ රේඛාවේ දිශාව 0 හෝ PQ දිශාව
ලක්ෂ්‍යය වේ.

$$\arg(z_1 - z_2) = \alpha$$

$$\arg(z_2 - z_1) = \pi + \alpha$$

PQ ට $\parallel$ රේඛාවක් සංකීර්ණ
මූලයක් ඇතිවේ. එම රේඛාව
හෝ PQ ට සමාන්තර දිශාවේ දී
හෝ QP දිශාවේ දී ලක්ෂ්‍යය වේ.
 R ලක්ෂ්‍යය $(z_1 - z_2)$ හි දිශාව
ලක්ෂ්‍යය වේ.





$$\arg(z_5 - z_6) = \lambda$$

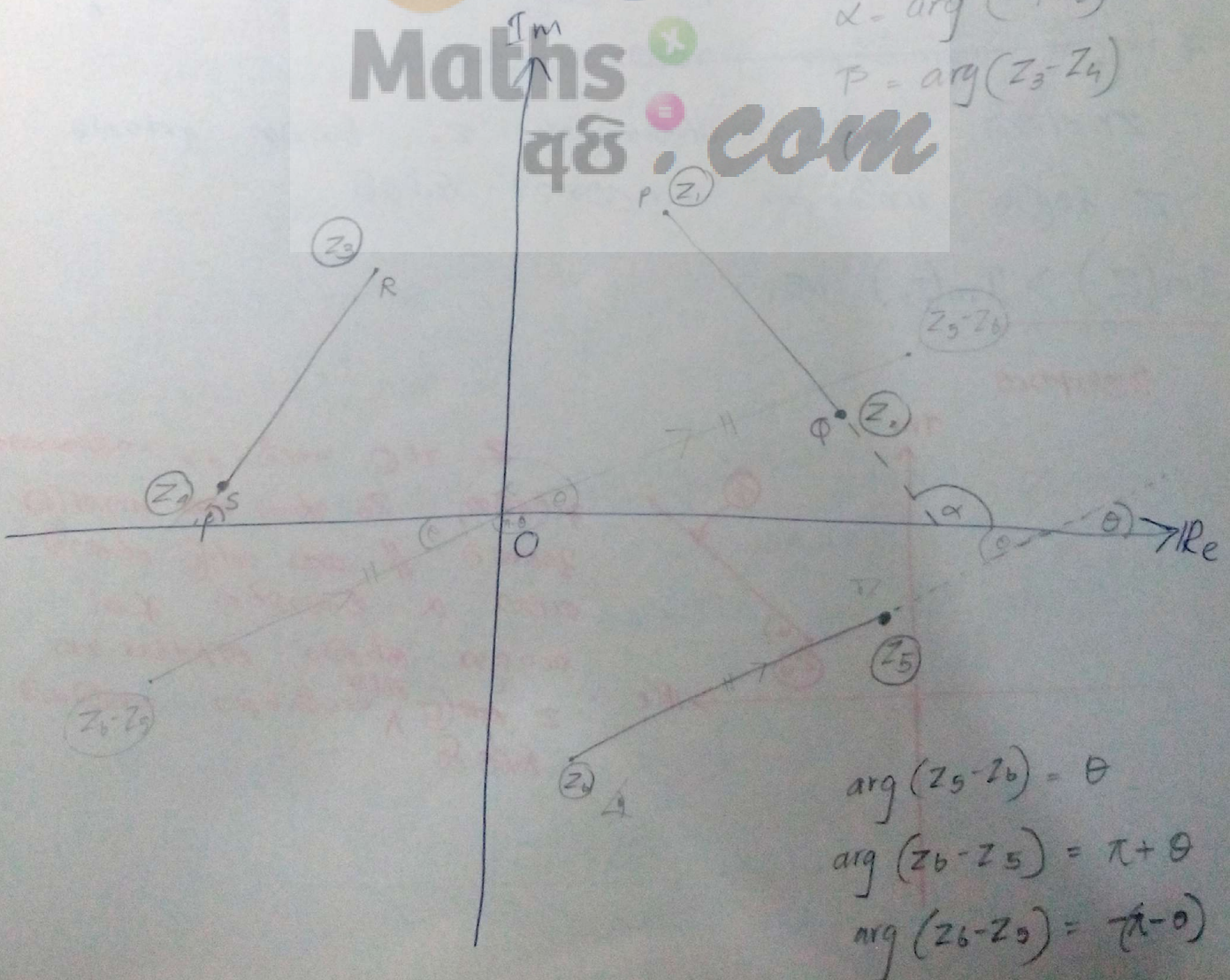
$$\arg(z_6 - z_5) = \pi + \lambda$$

$$\arg(z_6 - z_5) = -(\pi - \lambda)$$

$$\arg(z_6 - z_5) = -\pi + \lambda$$

$$\alpha = \arg(z_1 - z_2)$$

$$\beta = \arg(z_3 - z_4)$$



$$\arg(z_5 - z_6) = \theta$$

$$\arg(z_6 - z_5) = \pi + \theta$$

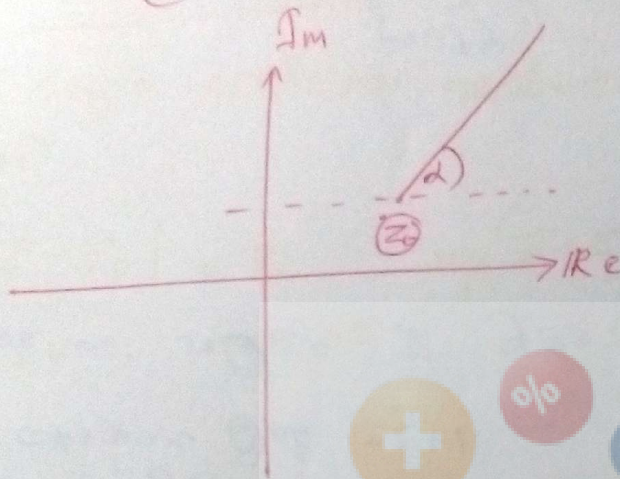
$$\arg(z_6 - z_5) = -(\pi - \theta)$$

$$\operatorname{Im}(Z) > \operatorname{Im}(Z_0) \quad \text{ওই}$$

Scanned by CamScanner

ഉദാഹരണം $\arg(z - z_0) = \alpha$ കണ്ടെത്തൽ വരമ്പ്

z_0 എന്ന ഓരോ കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ ഉണ്ട്,
 z_0 എന്ന ഓരോ കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ
 പ്ലാൻ // z കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ
 z കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ
 z കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ

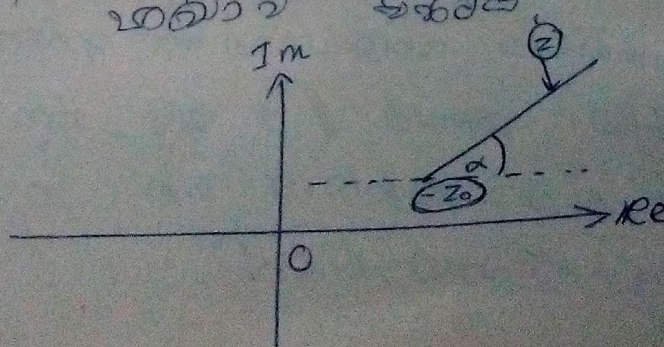


ഉദാഹരണം $\arg(z + z_0) = \alpha$ കണ്ടെത്തൽ വരമ്പ്
 z_0 എന്ന ഓരോ കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ
 α കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ

$$\arg(z + z_0) = \alpha$$

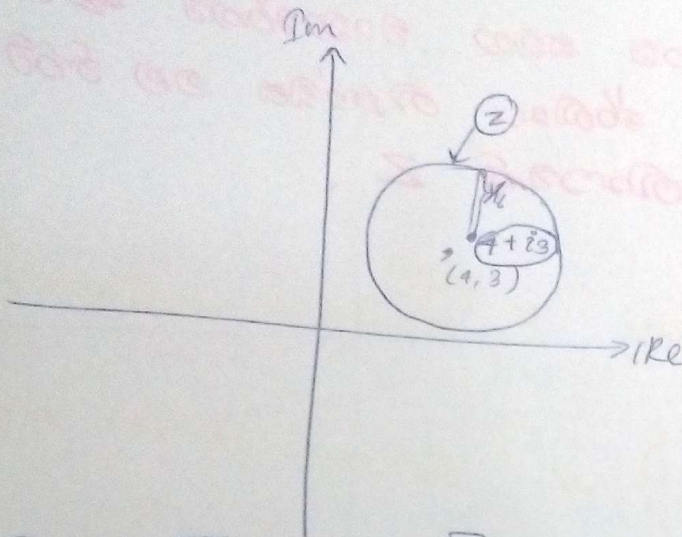
$$\arg(z - (-z_0)) = \alpha$$

$-z_0$ എന്ന ഓരോ കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ, $-z_0$ എന്ന
 പ്ലാൻ // z കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ
 z കോമിറ്റാർ കോമിറ്റാർ പ്ലാൻ



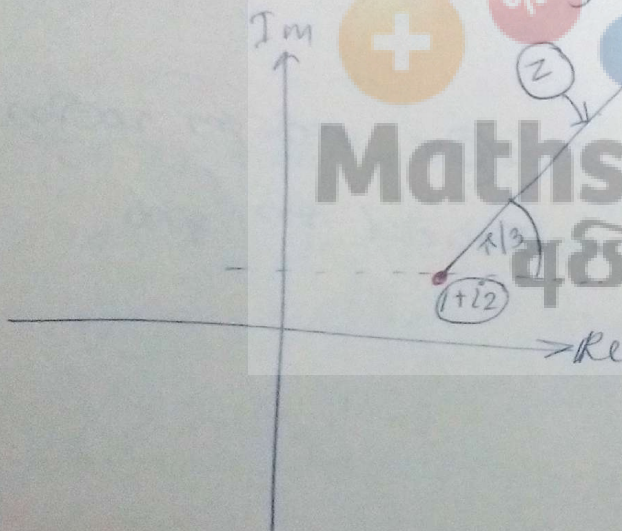
③ $|Z - (4 + i3)| = \frac{\pi}{6}$

$\arg(Z - (4 + i3)) = \frac{\pi}{6}$



$4 + i3$ ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന പോയിന്റിനെ കേന്ദ്രമാക്കി $\frac{\pi}{6}$ കോണിന്റെ അളവിലെ Z എന്ന പോയിന്റിനെ കണ്ടെത്തുക.

④ $\arg[Z - (1 + i2)] = \frac{\pi}{3}$ കേന്ദ്ര Z എന്ന പോയിന്റിനെ കണ്ടെത്തുക.



$1 + i2$ ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന പോയിന്റിനെ കേന്ദ്രമാക്കി $\frac{\pi}{3}$ കോണിന്റെ അളവിലെ Z എന്ന പോയിന്റിനെ കണ്ടെത്തുക.

⑤ $1 + i2$ ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

⑥ $\arg(Z + 4) = \frac{\pi}{4}$
 $\arg[Z - (-4 + i0)] = \frac{\pi}{4}$

$-4 + i0$ ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന പോയിന്റിനെ കേന്ദ്രമാക്കി $\frac{\pi}{4}$ കോണിന്റെ അളവിലെ Z എന്ന പോയിന്റിനെ കണ്ടെത്തുക.

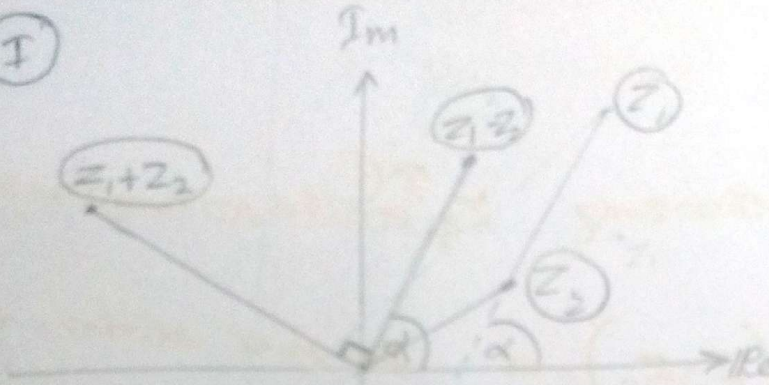
Z_0 മുഖേന Z നേരിടുന്ന r ക

[illegible]

① ଯଦି z_1 ଓ z_2 ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ z_1, z_2 ଥାନ୍ତି ତେବେ $|z_1| = |z_2|$ ଥାଏ
 ଯଦି $\left| \arg \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) \right| = \frac{\pi}{2}$ ତେବେ

ଦର୍ଶାନ୍ତୁ.

①



$$\arg(z_1 - z_2) = \alpha$$

$$\left| \arg \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) \right| = \frac{\pi}{2}$$

MathsApi.com

$$\left| \arg(z_1 + z_2) - \arg(z_1 - z_2) \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z_1 + z_2) - \arg(z_1 - z_2) = \pm \frac{\pi}{2}$$

(+) ଯଦି

$$\arg(z_1 + z_2) - \arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{2} + \arg(z_1 - z_2)$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

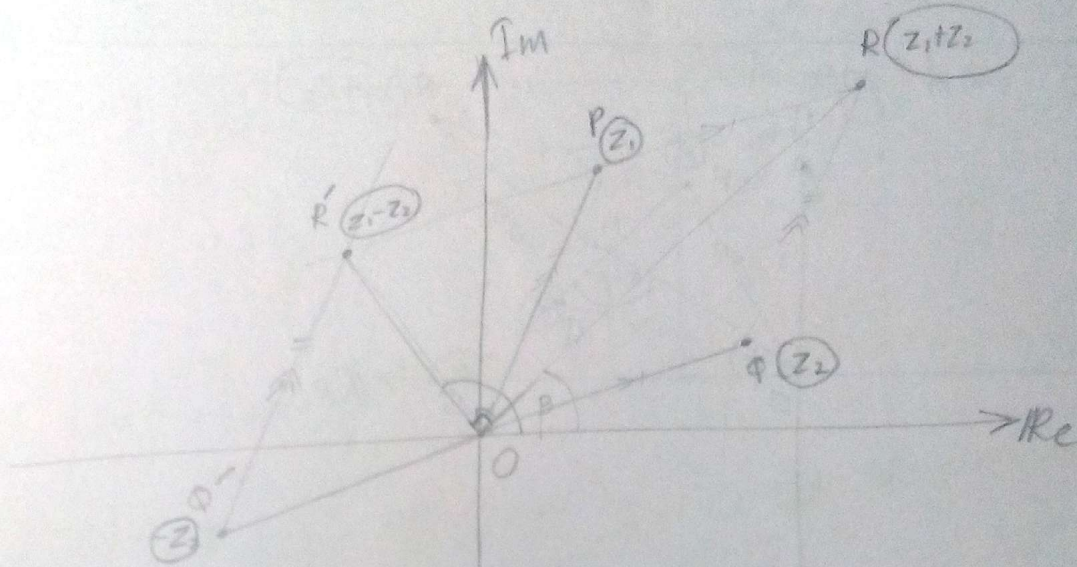
②

ଯଦି z_1 ଓ z_2 ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ

$$(z_1 + z_2) = i(z_1 - z_2) \text{ ଥାଏ ତେବେ}$$

$$\therefore |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

ଆମ විଚ୍ଛି କରීම .



$$\left| \arg \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \arg(z_1 + z_2) - \arg(z_1 - z_2) \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \beta$$

$$\arg(z_1 - z_2) = \alpha$$

$$|\beta - \alpha| = \frac{\pi}{2} = |\alpha - \beta|$$

$$OP = OQ' \text{ (ସମବାସୀ)}$$

$$OQ' = PR' \text{ (ସମବାସୀ ଥିବାରୁ ସମତୁଲ୍ୟ ହେବ)}$$

$$\therefore PR = PR'$$

$$\angle R'OR = \pi/2$$

$\therefore RR'$ ଲମ୍ବର ଉପରେ ଓ ଉପକେନ୍ଦ୍ର ଯାହାକି O ହେବ.

ଓହ୍ଲ ଉପକେନ୍ଦ୍ର ଗୋଟିଏ P ଉପରେ.

$$\therefore OP = PR \text{ ହେବ.}$$

$$PR = OQ \text{ କାରଣ}$$

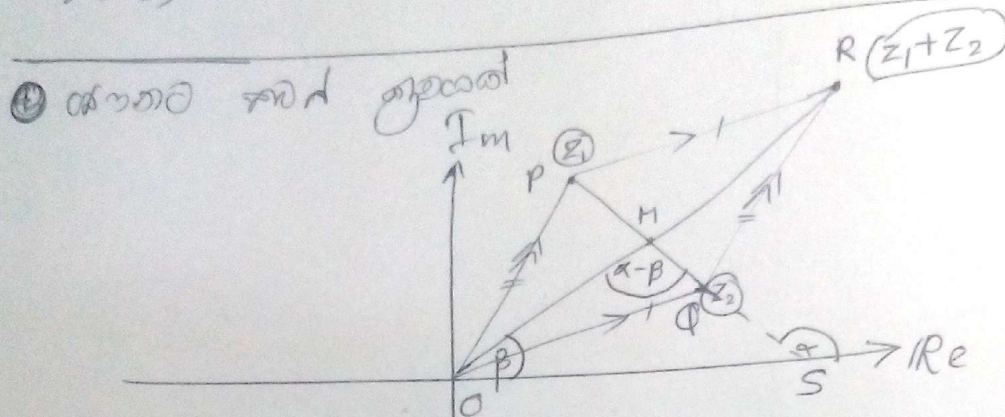
$$OP = OQ$$

$$OP = |z_1|$$

$$OQ = |z_2|$$

$$\therefore |z_1| = |z_2|$$

- ⑥ ②) $\cos \frac{\alpha}{\beta} + i \sin \frac{\alpha}{\beta}$ ഉപയോഗിച്ച്
 ①) $\cos \frac{\alpha}{\beta} + i \sin \frac{\alpha}{\beta}$ ന്റെ α കോണിന്റെ മൂല്യം
 കണ്ടെത്തുക.



OP, OQ രേഖകൾ z_1, z_2 യുടെ ഗ്രാഫ് ആണ്. $z_1 + z_2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് R ആണ്. $z_1 + z_2$ ന്റെ കോണിന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.

~~$z_1 + z_2$ ന്റെ കോണിന്റെ മൂല്യം~~

OMS Δ ന് $\beta + \angle OS = \alpha$

OMS = ~~$\alpha - \beta$~~

$$|\arg(z_1 + z_2) - \arg(z_1 - z_2)| = \frac{\pi}{2}$$

$$|\beta - \alpha| = \frac{\pi}{2} = |\alpha - \beta|$$

$\therefore$ OPRQ $\parallel$ ന്റെ α കോണിന്റെ മൂല്യം $\frac{\pi}{2}$ ആണ്.

$\therefore$ " α കോണിന്റെ മൂല്യം $\frac{\pi}{2}$

$$OP = OR$$

$$\therefore |z_1| = |z_2|$$

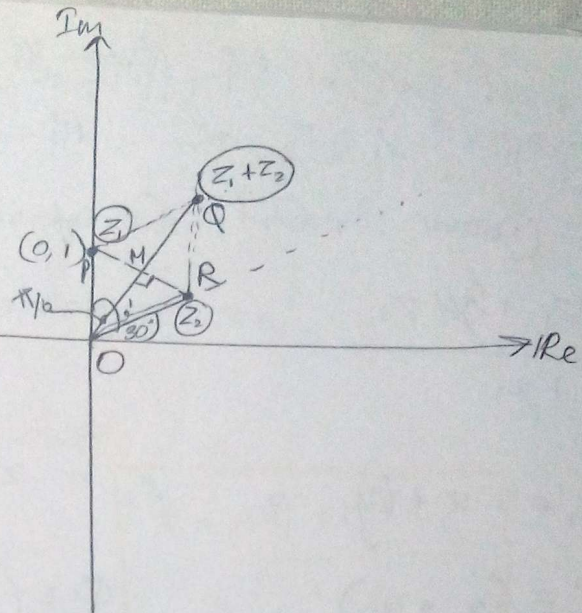
==

$$Z_1 = i = 0 + i1 \quad Z$$

$$Z_2 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{3 ന്റെ,}$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6}} \left\{ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right\}$$



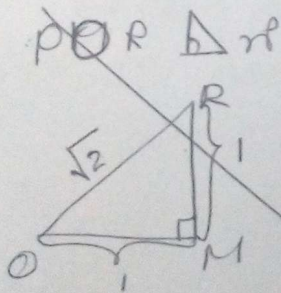
$$Z_2 = 1 \cdot \left\{ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right\}$$

OP, OR കളുടെ തുല്യ വെക്ടറുകൾ ഉണ്ടാക്കി ΔOPR രേഖപ്പെടുത്തുക. $Z_1 + Z_2$ ന്റെ വെക്ടർ കണ്ടെത്തുക.

$$|Z_1| = |Z_2| = 1$$

$\therefore \Delta OPR$ തുല്യവെക്ടർ. $\therefore$ $\angle POR = 30^\circ$ കണ്ടെത്തുക.

$$\therefore \angle POR = 30^\circ, \therefore \angle ROQ = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \quad \frac{\pi}{6}$$



$$OR = \sqrt{1^2 + 1^2} \\ OR = \sqrt{2}$$

$$OM = MR$$

$$OM + MR = OR = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = i + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} + i(1 + \sin \frac{\pi}{6})$$

$$Z_1 + Z_2 \text{ ന് } |Z_1 + Z_2| = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_1 + Z_2) = 75^\circ$$

Q3) Given points P, Q (complex numbers) Z_1, Z_2 are, PQ is divided in the ratio $\frac{PR}{RQ} = \frac{\lambda}{\mu}$ in the line segment PQ then the complex number Z_R is given by

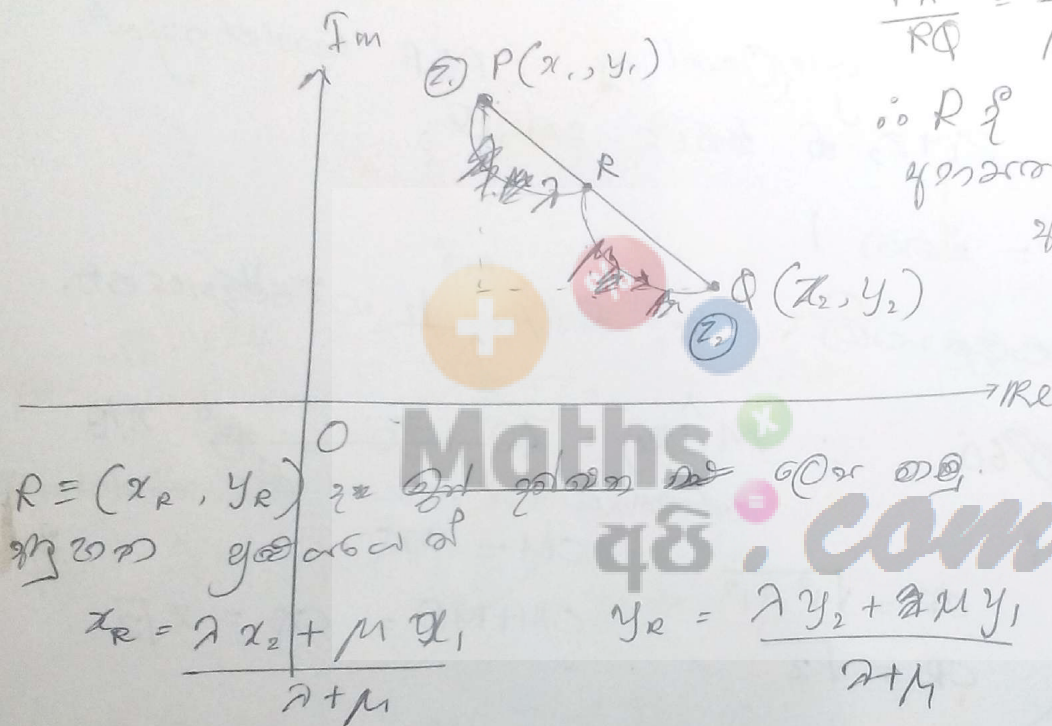
$$\frac{\mu Z_1 + \lambda Z_2}{\lambda + \mu}$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1, \quad Z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{and}$$

$$P \equiv (x_1, y_1) \quad Q \equiv (x_2, y_2)$$

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\therefore R$ divides PQ in the ratio $\lambda : \mu$ internally.



$$\therefore R \equiv \left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu} \right)$$

$\therefore R$ is the point dividing the line segment PQ in the ratio $\lambda : \mu$ internally.

$$Z_R = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu} + i \left(\frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu} \right)$$

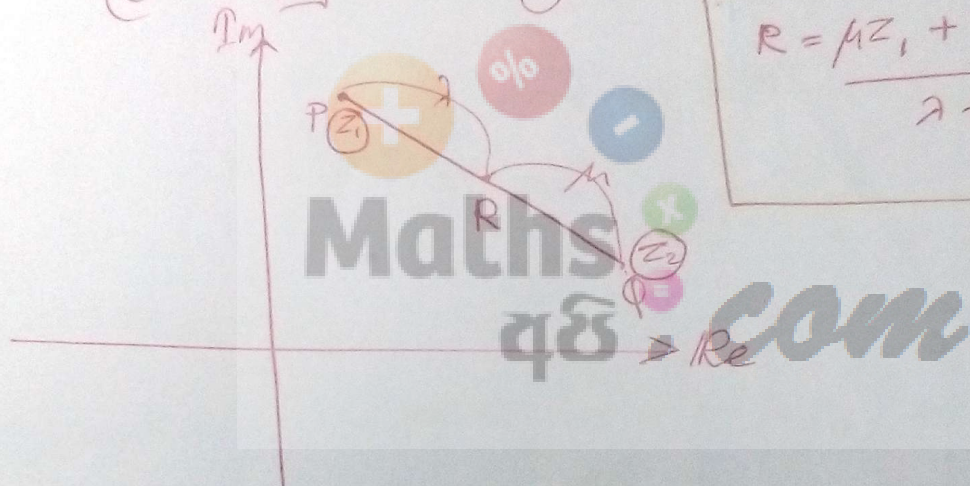
$$= \frac{\lambda x_2 + \mu x_1 + i(\lambda y_2 + \mu y_1)}{\lambda + \mu}$$

$$= \frac{\lambda x_2 + i \lambda y_2}{\lambda + \mu} + \frac{\mu x_1 + i \mu y_1}{\lambda + \mu}$$

$$Z_R = \frac{\mu(x_1 + iy_1) + \lambda(x_2 + iy_2)}{\lambda + \mu}$$

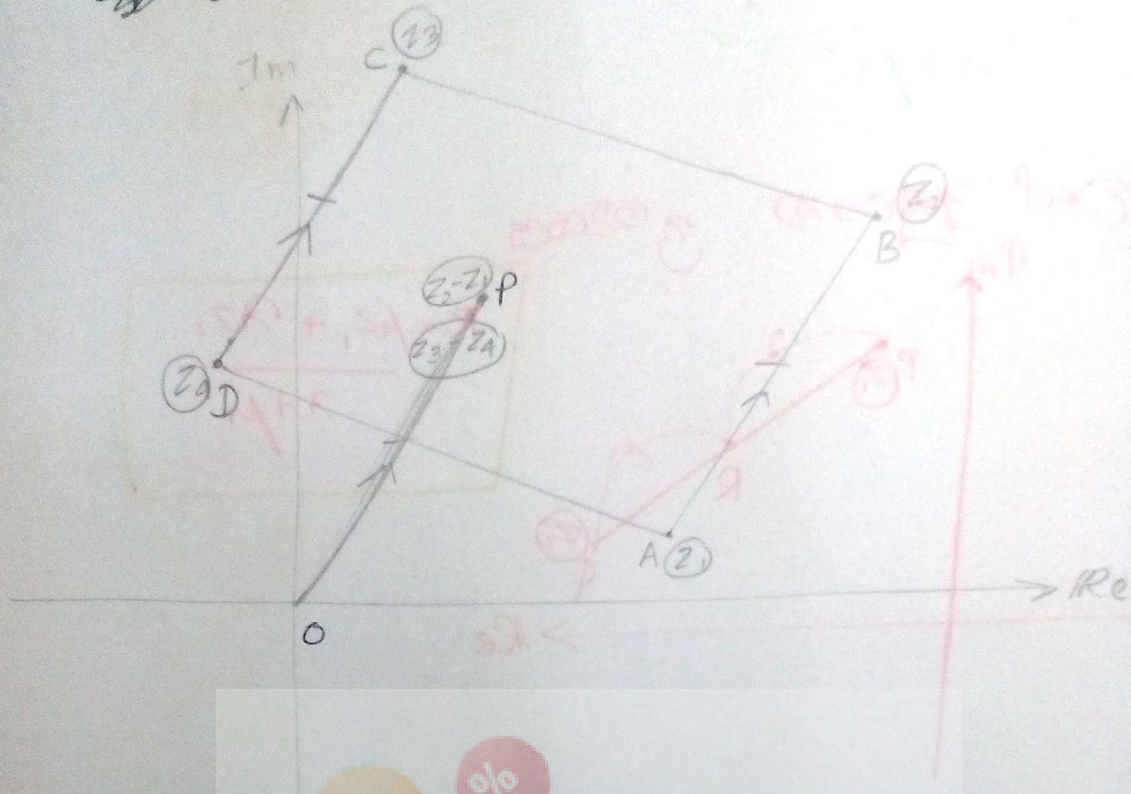
$$Z_R = \frac{\mu Z_1 + \lambda Z_2}{\lambda + \mu}$$

අගයන් මගින් පෙන්වන ලද සමීකරණය



(04) අපේ කඩඉන් A, B, C, D ලක්ෂ් චරිත නිරූපණය
 කරන තරමට කරන ලද ප්ලාස්ටික් Z_1, Z_2, Z_3, Z_4
 වේ. $Z_1 + Z_3 = Z_2 + Z_4$ නම් ඒකීය වන්නා
 ABCD කොනර්ස් ජ්‍යාමිතික භාජක රේඛාවකි.

(c) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$
~~then~~ $z_3 - z_4 = z_2 - z_1$



$z_3 - z_4 = z_2 - z_1 = Z$ හෙයින් $z_3 - z_4$ හා $z_2 - z_1$ දෙකම Z වේ.
 ගනු.

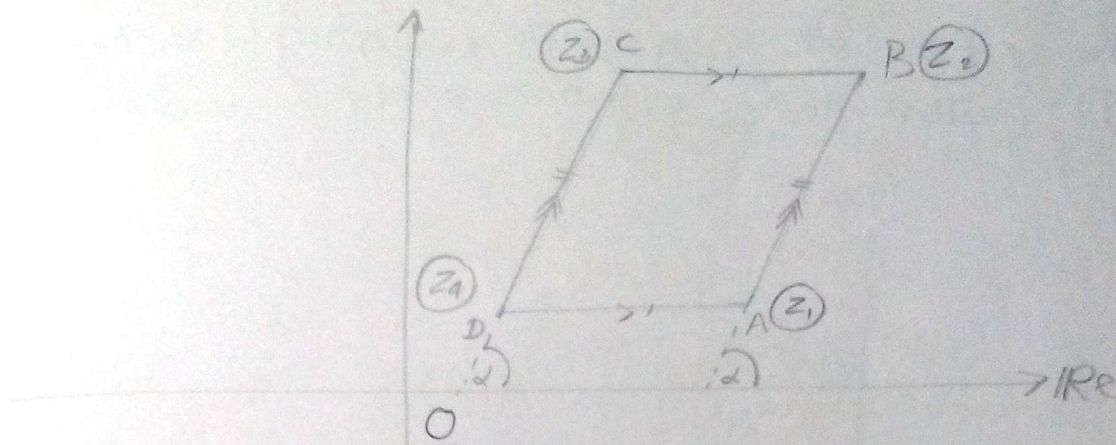
එනම් P වන්නේ Z හි උපරිම ලක්ෂ්‍යය වේ. ~~එනම් $z_3 - z_4$ හා $z_2 - z_1$ දෙකම Z වේ.~~

$z_3 - z_4 = z_2 - z_1 = Z$ වන නිසා A, B, C, D හා z_1, z_2, z_3, z_4 සමාසර්ථක වන බැවින් $ABCD$ ඒකාස්‍රීය චතුරස්‍රයක් වේ.

එනම් $|z_3 - z_4| = |z_2 - z_1| =$ AB හා CD දෙකේ දිග
 $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AB \parallel CD$ $AB = CD$ $AB \parallel CD$

$\therefore ABCD$ චතුරස්‍රය ඒකාස්‍රීය චතුරස්‍රයකි. (චතුරස්‍රයේ දිග සමාන වන බැවින්)

$\therefore z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ වේ
 $ABCD$ ඒකාස්‍රීය චතුරස්‍රයකි.



$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_4| = \cancel{1} = 1 \text{ (වලංගු)}.$$

$$\therefore |z_2 - z_1| = 1, |z_3 - z_4| = 1$$

$$\arg(z_2 - z_1) = \alpha$$

$$\arg(z_3 - z_4) = \alpha$$

$(z_2 - z_1)$ හරිදිගු සංඛ්‍යාවක් ම $(z_3 - z_4)$ හරිදිගු සංඛ්‍යාවක් වන්නේ නිසාවට යනාදිය.

$$\therefore z_2 - z_1 = z_3 - z_4$$

$$\therefore z_2 + z_4 = z_1 + z_3$$

නිගමනය කොණ්ඩාරාශ්‍රය 2 ක් යනාදිය,

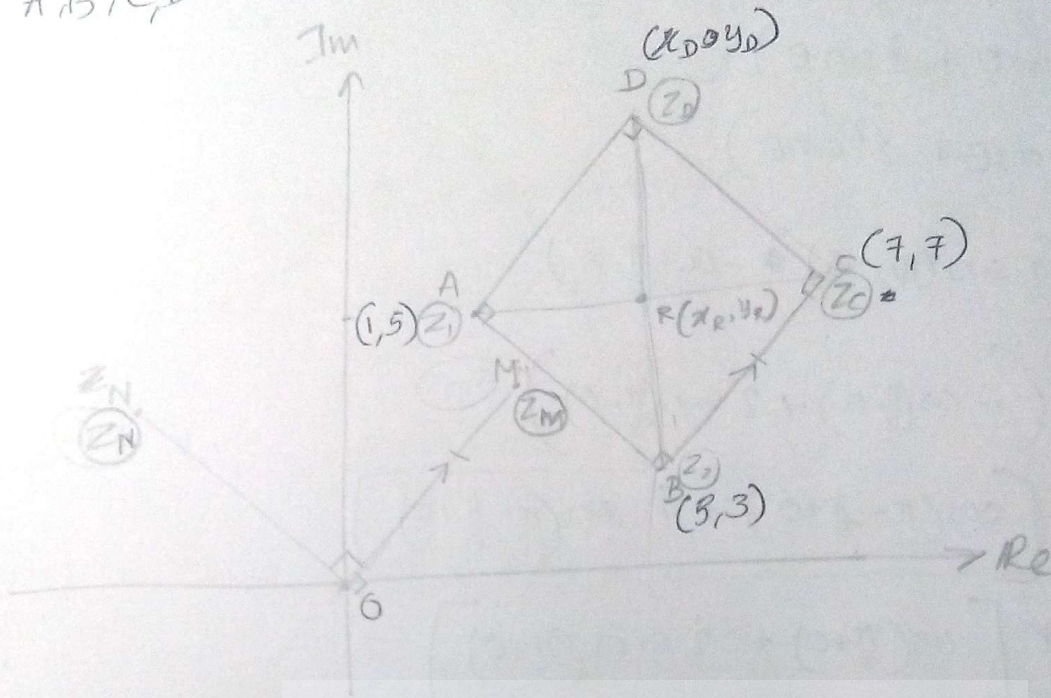
(1) හරිදිගු සංඛ්‍යා 2 ක් නිර්ණය කළ විට ඒවායේ නිශ්චලතාවයන් සමාන වීම සහ ඒවායේ අවස්ථාන සමාන වීම යන දෙක සත්‍ය විය යුතුය.

(2) ඉන්ද්‍රිය නිර්ණය කළ විට ඒවායේ නිශ්චලතාවයන් සමාන වීම සහ ඒවායේ අවස්ථාන සමාන වීම යන දෙක සත්‍ය විය යුතුය.

൫ A, B രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ
 $1+5i$ ന് $5+3i$ ന്. ABCD ചതുർഭുജം ആണെന്ന്
 C, D വൃത്തങ്ങളിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ
 തിരയുക.

എന്നിരിക്കട്ടെ -

(1) A, B, C, D കിരള താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ



$$Z_1 = 1 + 5i, Z_2 = 5 + 3i$$

BC || രേഖയെക്കുറിച്ച് അളക്കുക. BC ന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവായ R ന്റെ കോординേറ്റുകൾ കണ്ടെത്തുക.

AB || രേഖയെക്കുറിച്ച് അളക്കുക. AB ന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവായ M ന്റെ കോординേറ്റുകൾ കണ്ടെത്തുക.

$$Z_M = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

$$Z_N = \frac{Z_3 + Z_4}{2}$$

$$Z_N = i Z_M$$

$$\therefore Z_1 - Z_2 = i(Z_3 - Z_4)$$

$$i(Z_1 - Z_2) = i^2(Z_3 - Z_4)$$

$$i(5 + 3i + 1 + 5i) = -[Z_3 - (5 + 3i)]$$

$$(-4 + 2i)i = -Z_3 + 5 + 3i$$

$$-4i - 2 = -Z_3 + 5 + 3i$$

$$-Z_3 = 3 + i(1) - 7 + 7i$$

R ന്റെ കോординേറ്റുകൾ (x_R, y_R) ആണെന്ന് കരുതുക.

$$R = \left(\frac{7+1}{2}, \frac{7+5}{2} \right) = (4, 6)$$

$$D = (x_D, y_D)$$

$$x_R = 4 = \frac{x_D + 5}{2}$$

$$x_D = 3$$

$$\frac{Z_1 + Z_3}{2} = \frac{Z_2 + Z_4}{2}$$

$$Z_1 + Z_3 = Z_2 + Z_4$$

$$Z_4 =$$

~~Example~~

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$iz = ir(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r(i \cos \theta + i^2 \sin \theta)$$

$$= r(i \sin(\pi/2 - \theta) - \cos(\pi/2 - \theta))$$

$$= r(-\cos(\pi/2 - \theta) + i \sin(\pi/2 - \theta))$$

$$= r\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

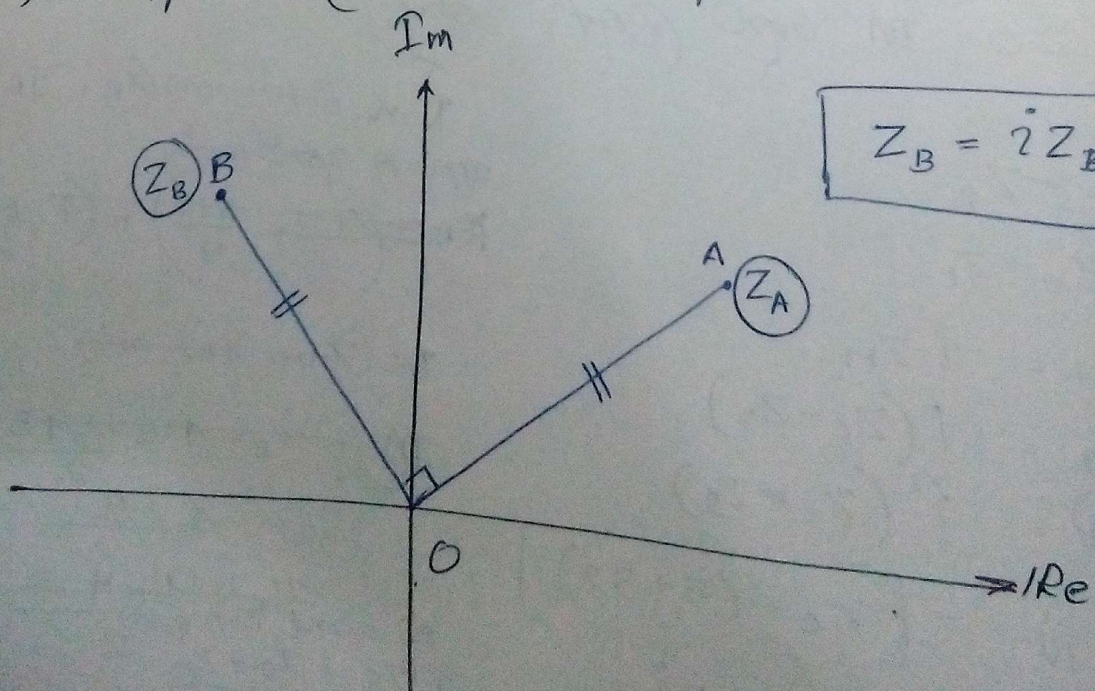
$$iz = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

$|z| = |iz|$ $\therefore z, iz$ has the same modulus.
 MathsApi.com

$$\arg(z) = \theta$$

$$\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \theta$$

z, iz are rotated 90° counter-clockwise.



എന്നത് തരമുള്ള അളവുകൾ ആയ z_1, z_2 ന്റെ,
 z_1, z_2 ന്റെ $\frac{z_1}{z_2}$ ക്ക്ക്കുള്ള അളവുകൾ കണ്ടെത്തുക.

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$|z_1| = r_1 \quad \arg(z_1) = \theta_1$$

$$|z_2| = r_2 \quad \arg(z_2) = \theta_2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

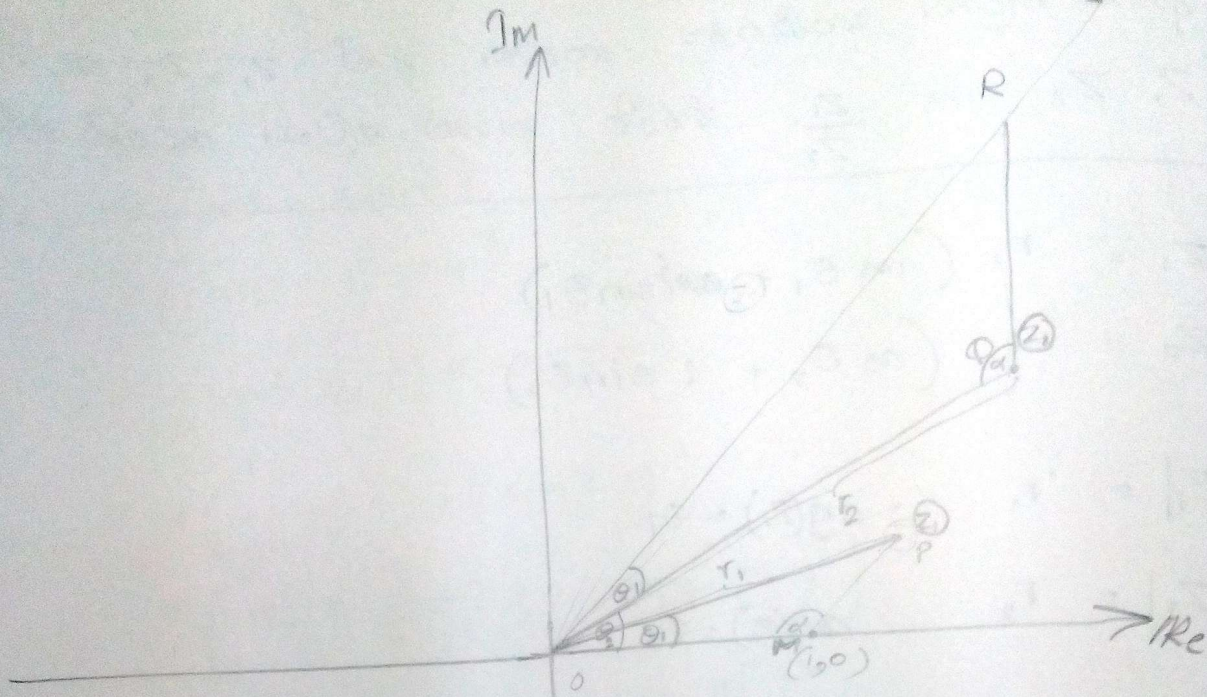
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$$

z_1, z_2 അളവുകൾ ആയ P, Q രണ്ടാമത്തെ
 കോർഡിനേറ്റുകൾ ആണ്.

നിർമ്മാണം :- അളവുകൾ OP ന്റെ അളവ് r_1 ആണ്
 അളവുകൾ OQ ന്റെ അളവ് r_2 ആണ്
 അളവുകൾ OP, OQ ന്റെ അളവുകൾ r_1, r_2 ആണ്.

$M = (1, 0)$ കോർഡിനേറ്റുകൾ O കേന്ദ്രം ആണ്.

$OMP = OQR$ ന്റെ അളവ് R ന്റെ അളവുകൾ l കോർഡിനേറ്റുകൾ
 ആണ്.



ഗുണനം കිරීම

OMP Δ m ORR Δ ലെ നില.
 $\div$ $\frac{r_1}{OR} = \frac{1}{r_2}$ എന്നെങ്കിലും $\frac{r_1}{OR} = \frac{1}{r_2}$ എന്നെങ്കിലും

$$\frac{r_1}{OR} = \frac{1}{r_2}$$

$$OR = r_1 r_2$$

R കോമ്പസിൽ ഉൾപ്പെടെ z_R ന്റെ വെക്ടർ z_R ന്റെ

$$|z_R| = r_1 r_2$$

$$\arg(z_R) = \theta_1 + \theta_2$$

$$z_R = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad \text{--- ①}$$

① $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}$

$$Z_R = Z_1 \cdot Z_2$$

~~Proof~~

R @ കേന്ദ്രം Z_1 ന്റെ അകലം r_1 ആയിരിക്കട്ടെ Z_2 ന്റെ അകലം r_2 ആയിരിക്കട്ടെ.

$\frac{Z_1}{Z_2}$ നോക്കൂ.

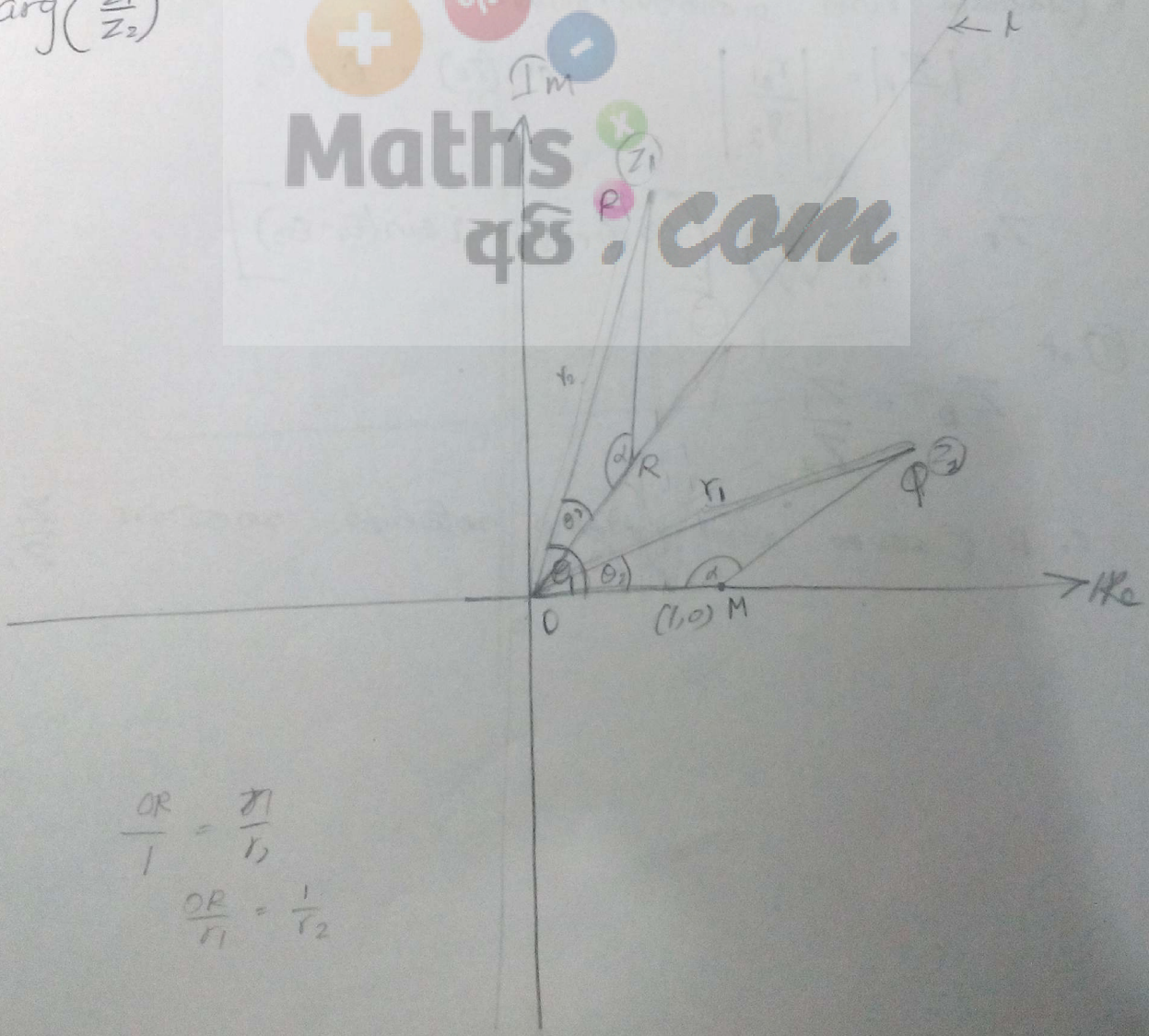
$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

②

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$



$$\frac{OR}{1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{OR}{r_1} = \frac{1}{r_2}$$

OP ഒരൊരുതര ഉപകർമ്മാർക്കു θ_2 $\neq$ ആകുന്ന പ്രകാരം 1 നെ ഒരൊരുതര കൂട്ടി.

$M = (1, 0)$ ഉപകർമ്മാർക്കു.

$OMQ = ORP$ എന്ന കൂട്ടി R നെ ഉപകർമ്മാർക്കു 1 നെ ഉപകർമ്മാർക്കു.
~~കൂട്ടി കൂട്ടി~~
 കൂട്ടി കൂട്ടി

$OMQ \Delta$ നെ $ORP \Delta$ ഉപകർമ്മാർക്കു.

$\therefore$ ഉപകർമ്മാർക്കു $\therefore$ ഉപകർമ്മാർക്കു $\therefore$ ഉപകർമ്മാർക്കു.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{OR}{1}$$

$$OR = \frac{r_1}{r_2}$$

R ഉപകർമ്മാർക്കു ഉപകർമ്മാർക്കു Z_R നെ

$$|Z_R| = \left| \frac{r_1}{r_2} \right| \quad \arg(Z_R) = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore Z_R = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

② നെ

$$Z_R = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$\therefore R$ ഉപകർമ്മാർക്കു ഉപകർമ്മാർക്കു $\therefore$ ഉപകർമ്മാർക്കു $\frac{Z_1}{Z_2}$ നെ.

z ന്റെ മൂല്യം $x + iy$ ആകട്ടെ z ന്റെ മൂല്യം $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ആകട്ടെ എന്ന് തെളിയിക്കാം.

$$z = x + iy$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{ഇവിടെ,} \quad |z| = r, \quad \arg(z) = \theta$$

$$2z = 2r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$|2z| = 2r$$

$$\arg(2z) = \theta$$

$$\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\left|\frac{1}{2}z\right| = \frac{1}{2}r$$

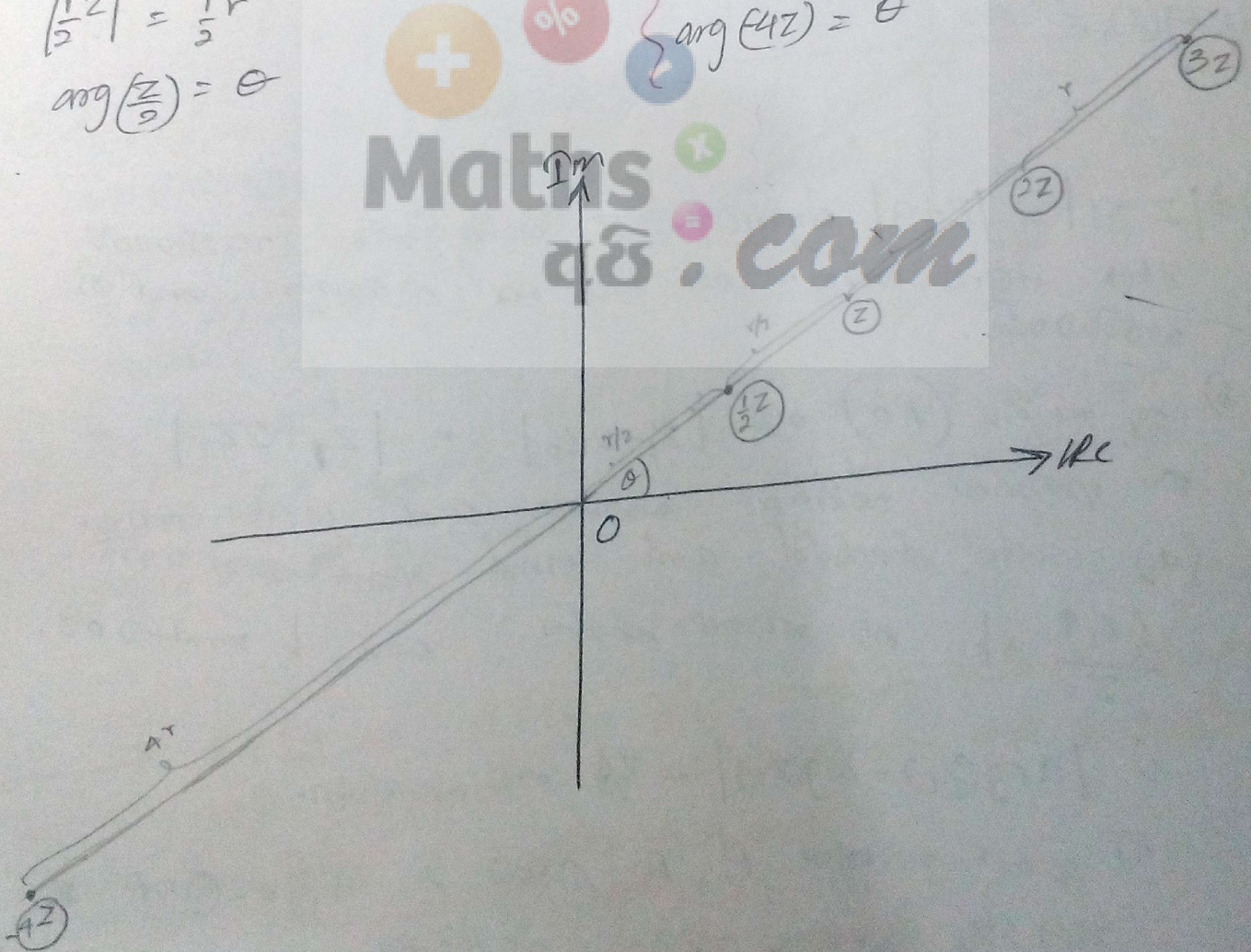
$$\arg\left(\frac{1}{2}z\right) = \theta$$

$$3z = 3r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$|3z| = 3r$$

$$\arg(3z) = \theta$$

$$\begin{aligned} -4z &= -4r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ |-4z| &= 4r \\ \arg(-4z) &= \theta + \pi \end{aligned}$$



$$|z| = r$$

$$\arg(z) = \theta$$

$$|2z| = 2|z|$$

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \arg[(2+i0) \cdot (z)] \\ &= \arg(2+i0) + \arg(z) \\ &= 0 + \theta\end{aligned}$$

$$\arg(z) = \theta$$

$$\begin{aligned} -4z &= -4r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ -4z &= 4r(-\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= 4r(-\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= 4r(\cos\theta) \end{aligned}$$

(1) ക) $|z - a| = |z + a|$ ആകുമ്പോൾ z ശക്തികൾ a യുടെ
 ദൂരം നൽകുന്ന നാൽക്ക. രേഖ a യെ 0 നന്നാക്കുവാൻ
 ശക്തികൾ.

b) z_1 m z_2 ($\neq 0$) and $|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$

മനസ്സിലെ അമിതമായ അറിവ് 2 മി ഡി. എസ്. എസ്. ന്നിൽ

(a) ഗവണ്മെന്റ് കൺസർവേഷൻ റിസർവ്വേഷൻ

2) $\frac{Z_1}{Z_2} = k$ ആയതുകൊണ്ട് k නിലനിൽ.

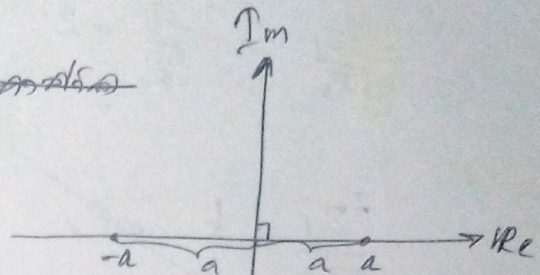
i) $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \pi/2$ ଯଦି ଉପରୋକ୍ତ.

ii) φ යනු $\mathbb{R}$ හි P_1, P_2 වල 2 ස්පර්ශකයකි.

$Z_1 + 2Z_2$ ന് Z_1, Z_2 അകർഷ്യ അതോ ആകർഷ്യ
 കർഷ്യ. OP_1 രേഖയെ OP_2 രേഖയെ $\perp$ എന്നായി

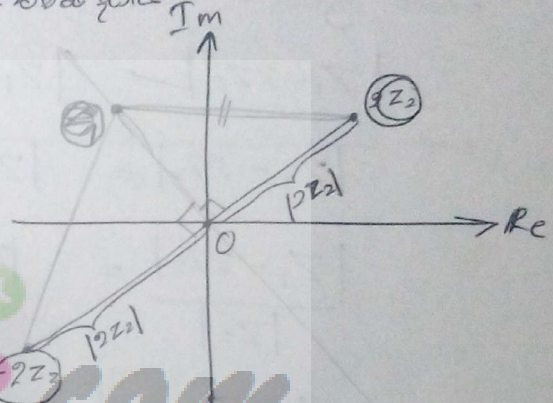
$\rho_1 \rho_2 = \tan^{-1} \left(\frac{4|k|}{k^2 - 4} \right)$ ആ ഏതൊരു മൂല്യം ആകട്ടെ.

$$|z - (a + i0)| = |z - (a + i0)|$$



2 - Z මගින් a සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කරයි. a සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කරයි. $a, -a$ ලෙස දැක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z හි පිහිටයි. a සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කරයි.

$$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 - (-2Z_2)|$$

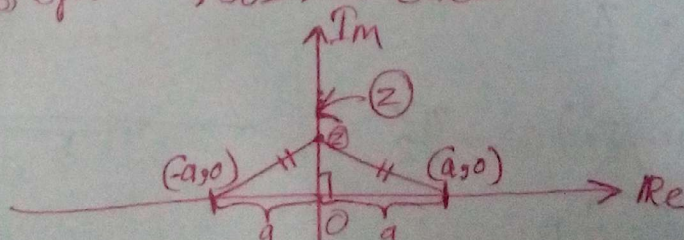


① $(2Z_2) \cap (-2Z_2)$ மிகக் குறைந்த
 மடங்களைக் கொண்டு $\mathbb{Z}$ ல்
 உள்ளது. $\mathbb{Z}$ மிகக் குறைந்த மடங்களைக்
 கொண்டு $\mathbb{Z}$ ல் உள்ளது.

$$Z_1, Z_2 \neq 0$$

$Z_1, Z_2 \neq 0$
 Z_1 හි අවයව ~~ස~~ $2Z_1$ $2Z_2$ $2Z_3$ $2Z_4$ $2Z_5$ $2Z_6$ $2Z_7$ $2Z_8$ $2Z_9$ $2Z_{10}$ $2Z_{11}$ $2Z_{12}$ $2Z_{13}$ $2Z_{14}$ $2Z_{15}$ $2Z_{16}$ $2Z_{17}$ $2Z_{18}$ $2Z_{19}$ $2Z_{20}$ $2Z_{21}$ $2Z_{22}$ $2Z_{23}$ $2Z_{24}$ $2Z_{25}$ $2Z_{26}$ $2Z_{27}$ $2Z_{28}$ $2Z_{29}$ $2Z_{30}$ $2Z_{31}$ $2Z_{32}$ $2Z_{33}$ $2Z_{34}$ $2Z_{35}$ $2Z_{36}$ $2Z_{37}$ $2Z_{38}$ $2Z_{39}$ $2Z_{40}$ $2Z_{41}$ $2Z_{42}$ $2Z_{43}$ $2Z_{44}$ $2Z_{45}$ $2Z_{46}$ $2Z_{47}$ $2Z_{48}$ $2Z_{49}$ $2Z_{50}$ $2Z_{51}$ $2Z_{52}$ $2Z_{53}$ $2Z_{54}$ $2Z_{55}$ $2Z_{56}$ $2Z_{57}$ $2Z_{58}$ $2Z_{59}$ $2Z_{60}$ $2Z_{61}$ $2Z_{62}$ $2Z_{63}$ $2Z_{64}$ $2Z_{65}$ $2Z_{66}$ $2Z_{67}$ $2Z_{68}$ $2Z_{69}$ $2Z_{70}$ $2Z_{71}$ $2Z_{72}$ $2Z_{73}$ $2Z_{74}$ $2Z_{75}$ $2Z_{76}$ $2Z_{77}$ $2Z_{78}$ $2Z_{79}$ $2Z_{80}$ $2Z_{81}$ $2Z_{82}$ $2Z_{83}$ $2Z_{84}$ $2Z_{85}$ $2Z_{86}$ $2Z_{87}$ $2Z_{88}$ $2Z_{89}$ $2Z_{90}$ $2Z_{91}$ $2Z_{92}$ $2Z_{93}$ $2Z_{94}$ $2Z_{95}$ $2Z_{96}$ $2Z_{97}$ $2Z_{98}$ $2Z_{99}$ $2Z_{100}$ $2Z_{101}$ $2Z_{102}$ $2Z_{103}$ $2Z_{104}$ $2Z_{105}$ $2Z_{106}$ $2Z_{107}$ $2Z_{108}$ $2Z_{109}$ $2Z_{110}$ $2Z_{111}$ $2Z_{112}$ $2Z_{113}$ $2Z_{114}$ $2Z_{115}$ $2Z_{116}$ $2Z_{117}$ $2Z_{118}$ $2Z_{119}$ $2Z_{120}$ $2Z_{121}$ $2Z_{122}$ $2Z_{123}$ $2Z_{124}$ $2Z_{125}$ $2Z_{126}$ $2Z_{127}$ $2Z_{128}$ $2Z_{129}$ $2Z_{130}$ $2Z_{131}$ $2Z_{132}$ $2Z_{133}$ $2Z_{134}$ $2Z_{135}$ $2Z_{136}$ $2Z_{137}$ $2Z_{138}$ $2Z_{139}$ $2Z_{140}$ $2Z_{141}$ $2Z_{142}$ $2Z_{143}$ $2Z_{144}$ $2Z_{145}$ $2Z_{146}$ $2Z_{147}$ $2Z_{148}$ $2Z_{149}$ $2Z_{150}$ $2Z_{151}$ $2Z_{152}$ $2Z_{153}$ $2Z_{154}$ $2Z_{155}$ $2Z_{156}$ $2Z_{157}$ $2Z_{158}$ $2Z_{159}$ $2Z_{160}$ $2Z_{161}$ $2Z_{162}$ $2Z_{163}$ $2Z_{164}$ $2Z_{165}$ $2Z_{166}$ $2Z_{167}$ $2Z_{168}$ $2Z_{169}$ $2Z_{170}$ $2Z_{171}$ $2Z_{172}$ $2Z_{173}$ $2Z_{174}$ $2Z_{175}$ $2Z_{176}$ $2Z_{177}$ $2Z_{178}$ $2Z_{179}$ $2Z_{180}$ $2Z_{181}$ $2Z_{182}$ $2Z_{183}$ $2Z_{184}$ $2Z_{185}$ $2Z_{186}$ $2Z_{187}$ $2Z_{188}$ $2Z_{189}$ $2Z_{190}$ $2Z_{191}$ $2Z_{192}$ $2Z_{193}$ $2Z_{194}$ $2Z_{195}$ $2Z_{196}$ $2Z_{197}$ $2Z_{198}$ $2Z_{199}$ $2Z_{200}$ $2Z_{201}$ $2Z_{202}$ $2Z_{203}$ $2Z_{204}$ $2Z_{205}$ $2Z_{206}$ $2Z_{207}$ $2Z_{208}$ $2Z_{209}$ $2Z_{210}$ $2Z_{211}$ $2Z_{212}$ $2Z_{213}$ $2Z_{214}$ $2Z_{215}$ $2Z_{216}$ $2Z_{217}$ $2Z_{218}$ $2Z_{219}$ $2Z_{220}$ $2Z_{221}$ $2Z_{222}$ $2Z_{223}$ $2Z_{224}$ $2Z_{225}$ $2Z_{226}$ $2Z_{227}$ $2Z_{228}$ $2Z_{229}$ $2Z_{230}$ $2Z_{231}$ $2Z_{232}$ $2Z_{233}$ $2Z_{234}$ $2Z_{235}$ $2Z_{236}$ $2Z_{237}$ $2Z_{238}$ $2Z_{239}$ $2Z_{240}$ $2Z_{241}$ $2Z_{242}$ $2Z_{243}$ $2Z_{244}$ $2Z_{245}$ $2Z_{246}$ $2Z_{247}$ $2Z_{248}$ $2Z_{249}$ $2Z_{250}$ $2Z_{251}$ $2Z_{252}$ $2Z_{253}$ $2Z_{254}$ $2Z_{255}$ $2Z_{256}$ $2Z_{257}$ $2Z_{258}$ $2Z_{259}$ $2Z_{260}$ $2Z_{261}$ $2Z_{262}$ $2Z_{263}$ $2Z_{264}$ $2Z_{265}$ $2Z_{266}$ $2Z_{267}$ $2Z_{268}$ $2Z_{269}$ $2Z_{270}$ $2Z_{271}$ $2Z_{272}$ $2Z_{273}$ $2Z_{274}$ $2Z_{275}$ $2Z_{276}$ $2Z_{277}$ $2Z_{278}$ $2Z_{279}$ $2Z_{280}$ $2Z_{281}$ $2Z_{282}$ $2Z_{283}$ $2Z_{284}$ $2Z_{285}$ $2Z_{286}$ $2Z_{287}$ $2Z_{288}$ $2Z_{289}$ $2Z_{290}$ $2Z_{291}$ $2Z_{292}$ $2Z_{293}$ $2Z_{294}$ $2Z_{295}$ $2Z_{296}$ $2Z_{297}$ $2Z_{298}$ $2Z_{299}$ $2Z_{300}$ $2Z_{301}$ $2Z_{302}$ $2Z_{303}$ $2Z_{304}$ $2Z_{305}$ $2Z_{306}$ $2Z_{307}$ $2Z_{308}$ $2Z_{309}$ $2Z_{310}$ $2Z_{311}$ $2Z_{312}$ $2Z_{313}$ $2Z_{314}$ $2Z_{315}$ $2Z_{316}$ $2Z_{317}$ $2Z_{318}$ $2Z_{319}$ $2Z_{320}$ $2Z_{321}$ $2Z_{322}$ $2Z_{323}$ $2Z_{324}$ $2Z_{325}$ $2Z_{326}$ $2Z_{327}$ $2Z_{328}$ $2Z_{329}$ $2Z_{330}$ $2Z_{331}$ $2Z_{332}$ $2Z_{333}$ $2Z_{334}$ $2Z_{335}$ $2Z_{336}$ $2Z_{337}$ $2Z_{338}$ $2Z_{339}$ $2Z_{340}$ $2Z_{341}$ $2Z_{342}$ $2Z_{343}$ $2Z_{344}$ $2Z_{345}$ $2Z_{346}$ $2Z_{34$

→ $a+io$ ന് $-a+io$ ചുറ്റും ചുറ്റിക്കൊണ്ട്
ഒന്നാം ക്രമത്തിൽ $\frac{1}{z}$ ചുറ്റിക്കൊണ്ട്
ചുറ്റിക്കൊണ്ട് ചുറ്റിക്കൊണ്ട്.



2 மைல் 50 கி.மீ. முதல் 100 கி.மீ. வரை உள்ள பகுதிகளில்

മറുത ക്രമം :-

$$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$$

$$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 - (-2Z_2)|$$

$$\frac{|Z_1 - 2Z_2|}{|Z_2|} = \frac{|Z_1 - (-2Z_2)|}{|Z_2|}$$

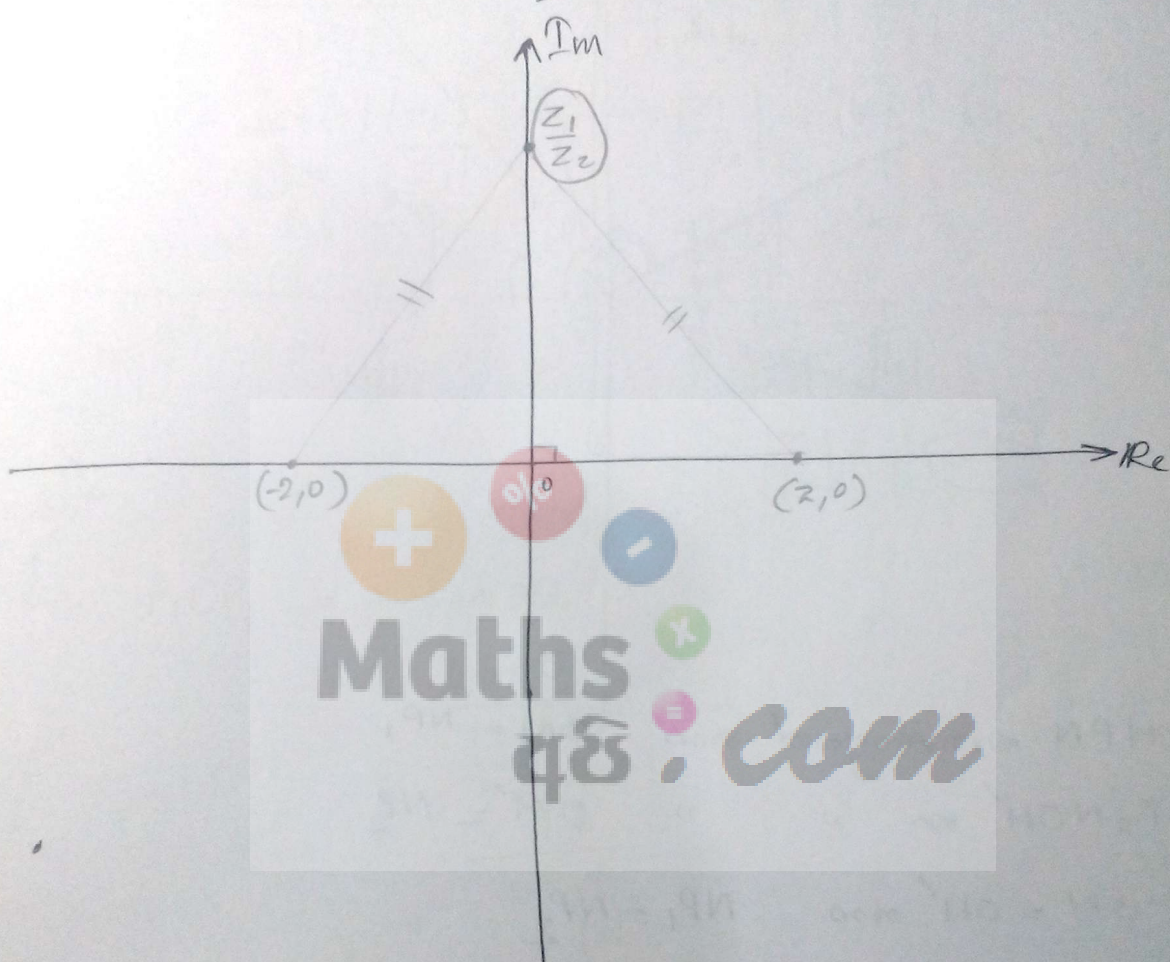
$$\left| \frac{Z_1 - 2Z_2}{Z_2} \right| = \left| \frac{Z_1 - (-2Z_2)}{Z_2} \right|$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} - 2 \right| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} - (-2) \right|$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} - 2 \right| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right|$$

$$\underline{z_1 \dot{z} = z_2}$$

$(2 + i0)$ ന്റെ ചുറ്റും നയിക്കുമ്പോൾ $(-2 + i0)$ ന്റെ ചുറ്റും
 ചുറ്റും നയിക്കുമ്പോൾ z_1 ന്റെ ചുറ്റും z_2 ന്റെ ചുറ്റും
 z_1 ന്റെ ചുറ്റും z_2 ന്റെ ചുറ്റും


$$\frac{Z_1}{Z_2} \text{ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ള ചോദ്യം ചെയ്തതായി തോന്നുന്നു.}$$
$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}$$

$\therefore \frac{iz_1}{z_2} = k$ অর্থ k সংখ্যিক.

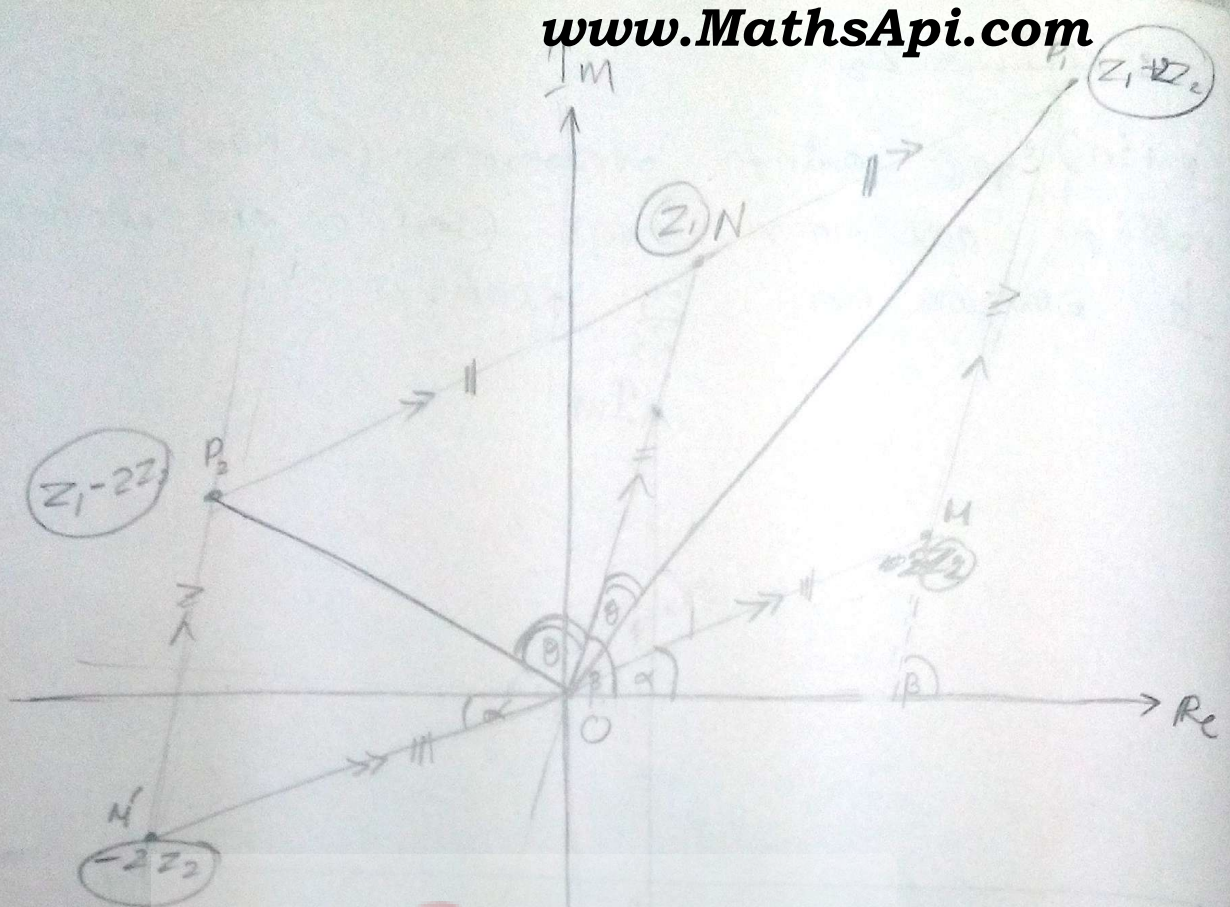
Z_1 துருவி Z_2 க்குள்ளே உள்ளது

$$i) \left| \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$| \arg(z_1) - \arg(z_2) | = \frac{\pi}{2}$$

~~ඔබ $\arg(z_1) \geq \arg(z_2)$ වන බවින්~~

~~$$|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \pi/2$$~~



OMP₁N₁ and OMP₂N₂ are right angled triangles
 $OM = NP_1$
 $OM' = NP_2$

$$OM = OM' \text{ and } NP_1 = NP_2$$

$$|z_1 - 2z_2| = OP_2, \quad |z_1 + 2z_2| = OP_1$$

$$|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2| \text{ and } OP_2 = OP_1$$

$OP_1P_2 \Delta$ is an isosceles Δ .

$$\therefore \angle P_2NO = 90^\circ = \angle P_1NO$$

$$\angle P_2ON = \angle P_1ON (= \theta) \text{ say.}$$

$$\text{In } \triangle ONP_1, \tan \theta = \frac{|2z_2 + z_1 - z_1|}{|z_1|}$$

$$\tan \theta = \frac{|2z_2|}{|z_1|}$$

$$\tan \theta = \frac{|2z_2|}{|z_1|}$$

$$\tan \theta = \frac{|(2+io) z_2|}{|z_1|}$$

$$= \frac{|2+io| |z_2|}{|z_1|}$$

$$= 2 \cdot \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$$

$$\tan \theta = 2 \cdot \frac{1}{|k|}$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = k$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |k|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = k$$

$$\therefore \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |k|$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = |k|$$

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{1}{|k|}$$

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{1}{|k|}$$

and

$$\tan \angle P_1 \hat{O} P_2 = \tan 2\theta$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{2}{|k|}}{1 - \frac{4}{|k|^2}}$$

$$= \frac{4}{|k|} \div \left(\frac{|k|^2 - 4}{|k|^2} \right)$$

$$= \frac{4}{|k|} \times \frac{|k|^2}{|k|^2 - 4}$$

$$= \frac{4|k|}{|k|^2 - 4}$$

$$\tan \angle P_1 \hat{O} P_2 = \frac{4|k|}{|k|^2 - 4}$$

$$\angle P_1 \hat{O} P_2 = \tan^{-1} \left(\frac{4|k|}{|k|^2 - 4} \right)$$

$$\angle P_1 \hat{O} P_2 = \tan^{-1} \left(\frac{4|k|}{|k|^2 - 4} \right)$$

$$\angle PO_1P_2 = 90^\circ \text{ and } OP_1 \perp P_1P_2$$

$$\angle PO_2P_1 = 90^\circ, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ or } 45^\circ$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2}{|k|}$$

$$1 = \frac{2}{|k|}$$

$$|k| = 2$$

$$k = \pm 2$$

രൂ 7

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad Z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

മുകളിലെ രേഖാചിത്രം

ഇവയെ കമ്യൂട്ടേഷൻ ചെയ്താൽ A, B എന്നീ രേഖാചിത്രം.

$\arg(Z_1) = ?$ $\arg(Z_2) = ?$ $\angle ACB$ ന്റെ അളവ്

മുകളിലെ രേഖാചിത്രം നോക്കി. $\angle ACB$ ന്റെ അളവ് 60° ആണ്. $\arg(Z_1) = 30^\circ$ $\arg(Z_2) = 120^\circ$ $\angle ACB = 90^\circ$

$|z - (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})| \leq 2$ എന്നതുകൊണ്ട് $|z - 3|$ ന്റെ മൂല്യം 2 ന്റെ മുകളിൽ ഉണ്ടാകില്ല.

$\arg(Z-1) = \frac{\pi}{6}$ എന്നതുകൊണ്ട് $|z|$ ന്റെ മൂല്യം 2 ന്റെ മുകളിൽ ഉണ്ടാകില്ല.

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$Z_1 = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

$$Z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\arg(Z_1) = \frac{\pi}{6}$$

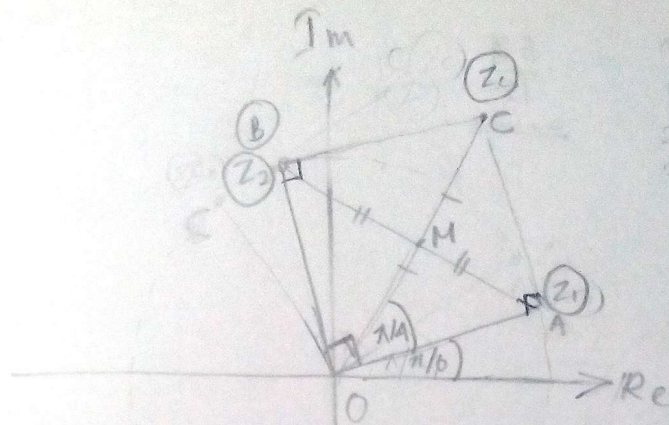
$$Z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \cos(\pi - 60^\circ) + i \sin(\pi - 60^\circ)$$

$$Z_2 = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$Z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$$

$$\arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3}$$



$$|z_1| = 1$$

$$\arg(z_1) = \pi/6$$

$$|Z_2| = 1$$

$$\arg(z_2) = \pi/3 \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

C නිශ්පාදන දැනටමත් සමපූර්ණ
 නොවන නිසා Z_c අඩු,

$$Z_C = iZ_1$$

OACB மூலக்கூறு வரைபடம்
M.E. கணிதத்திற்காக.

~~$$Z_c = i \cos \frac{\pi}{6} + i^2 \sin \frac{\pi}{6}$$~~

$$\underline{Z_2 + Z_1} = \underline{Z_C + Z_0}$$

~~$$\frac{Z_2 + Z_1}{Z} = \frac{Z_C + 0}{Z}$$~~

$$Z_2 + Z_1 \neq Z_c$$

$$Z_c = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) + \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + i \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_c = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j$$

$$Z_c = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_C = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) + j \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

$$Z_c = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{3}-1) + i \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \left\{ 1 + i \frac{(3-1)}{2} \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}-1} \{ 1 + i \}$$

$$\arg(z_c) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{12}}}$$

$$|z_1| = (1^{\text{වෙන})} = |z_2|$$

$$|z_c| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

$$|z_c| = \sqrt{2}|z_1|$$

$$\underline{\underline{|z_c| = \sqrt{2} \text{ වෙන}}}$$

$$\left| z - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}_{z_0} \right| \leq 2$$

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_0 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

$$|z_0| = 1$$

$$\arg(z_0) = 60^\circ$$

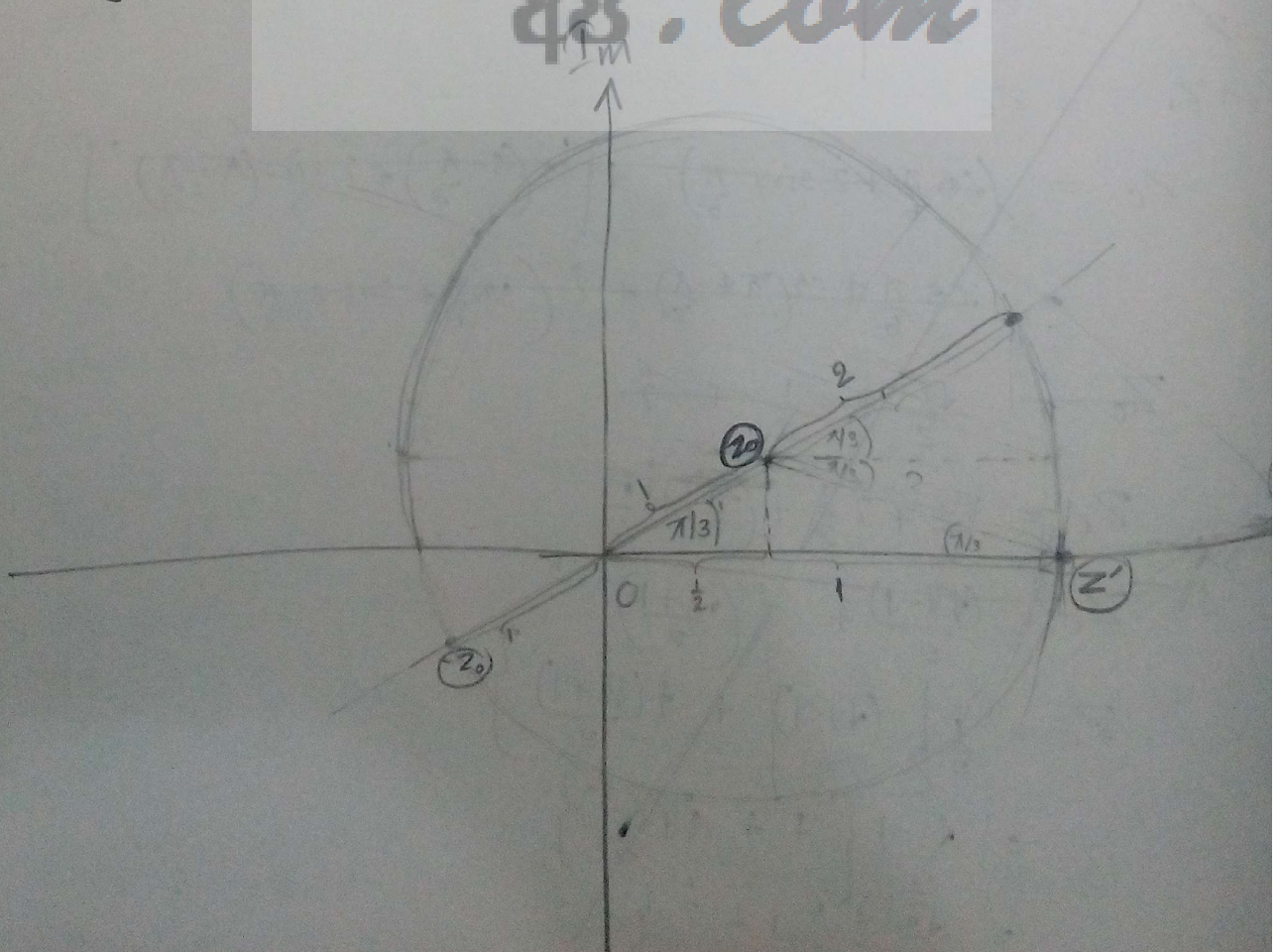
$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ අග 2 ධනික අංකයක්

ධනාත්මක කෝණයක් වූ අතර එය

2012 වසරේ A වූ අවස්ථාවේදී

කෝණයක් වූ z අගය

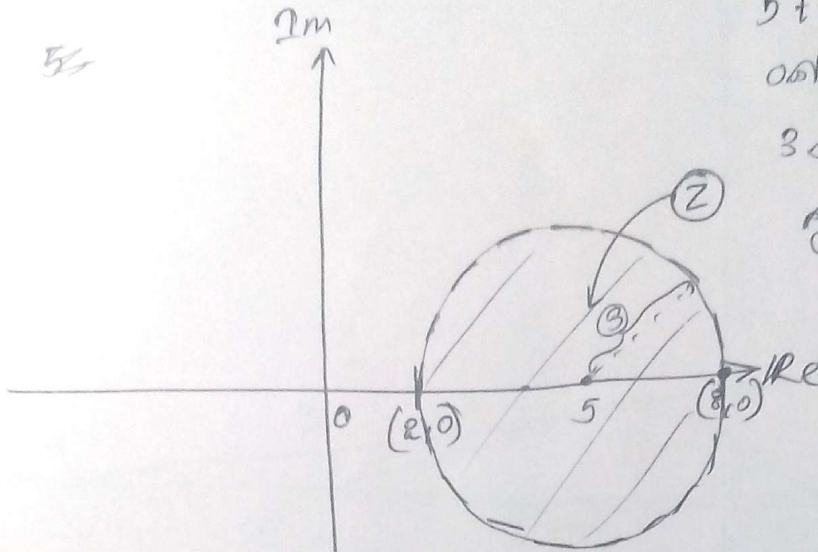
ධනාත්මක අගයයකි.



1) $|z-5| < 3$

2) $|z+i| \geq 1$

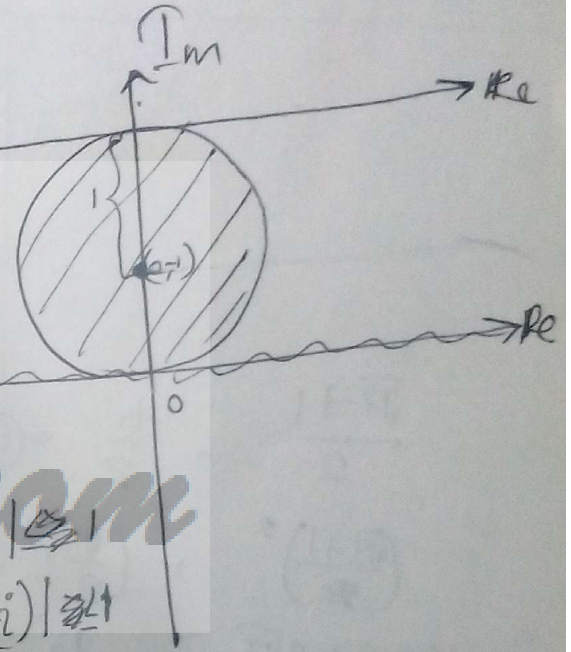
1) 5



5+io എന്ന അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
അന്തർഗത കൃത്യമായ ചുരുക്ക
3 കി അകത്തുള്ള കൃത്യമായ
മുഴുവൻ അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
മെ Z എന്ന അക്ഷീകൃത
രേഖയ്ക്കു ചുരുക്ക.

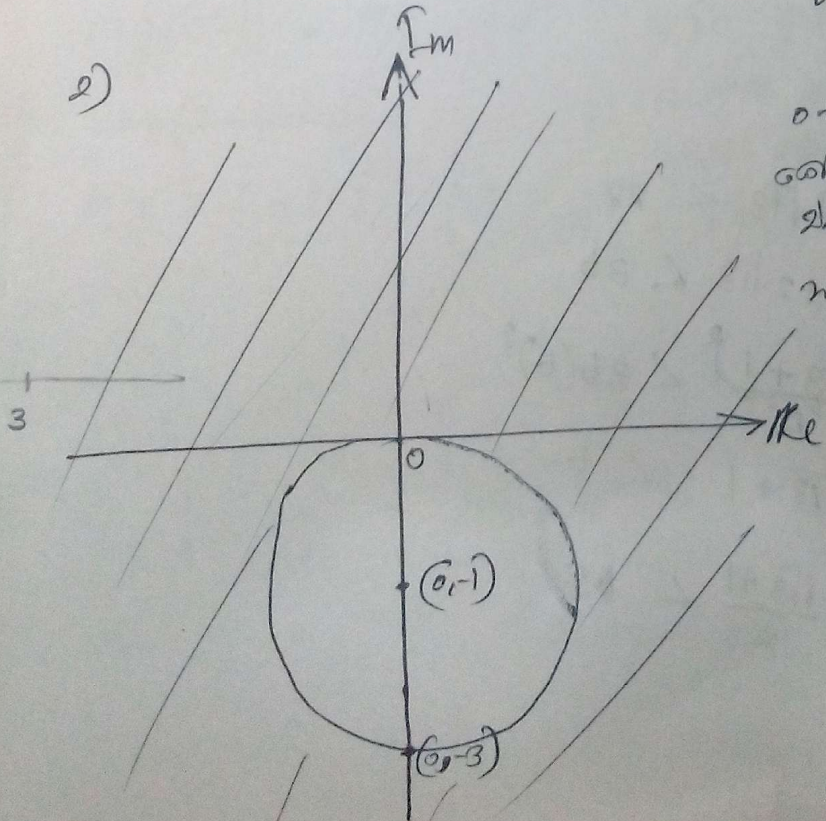
2)

0+i(-1) എന്ന അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
അന്തർഗത കൃത്യമായ ചുരുക്ക
1 കി അകത്തുള്ള കൃത്യമായ
മെ Z എന്ന അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
ചുരുക്ക.

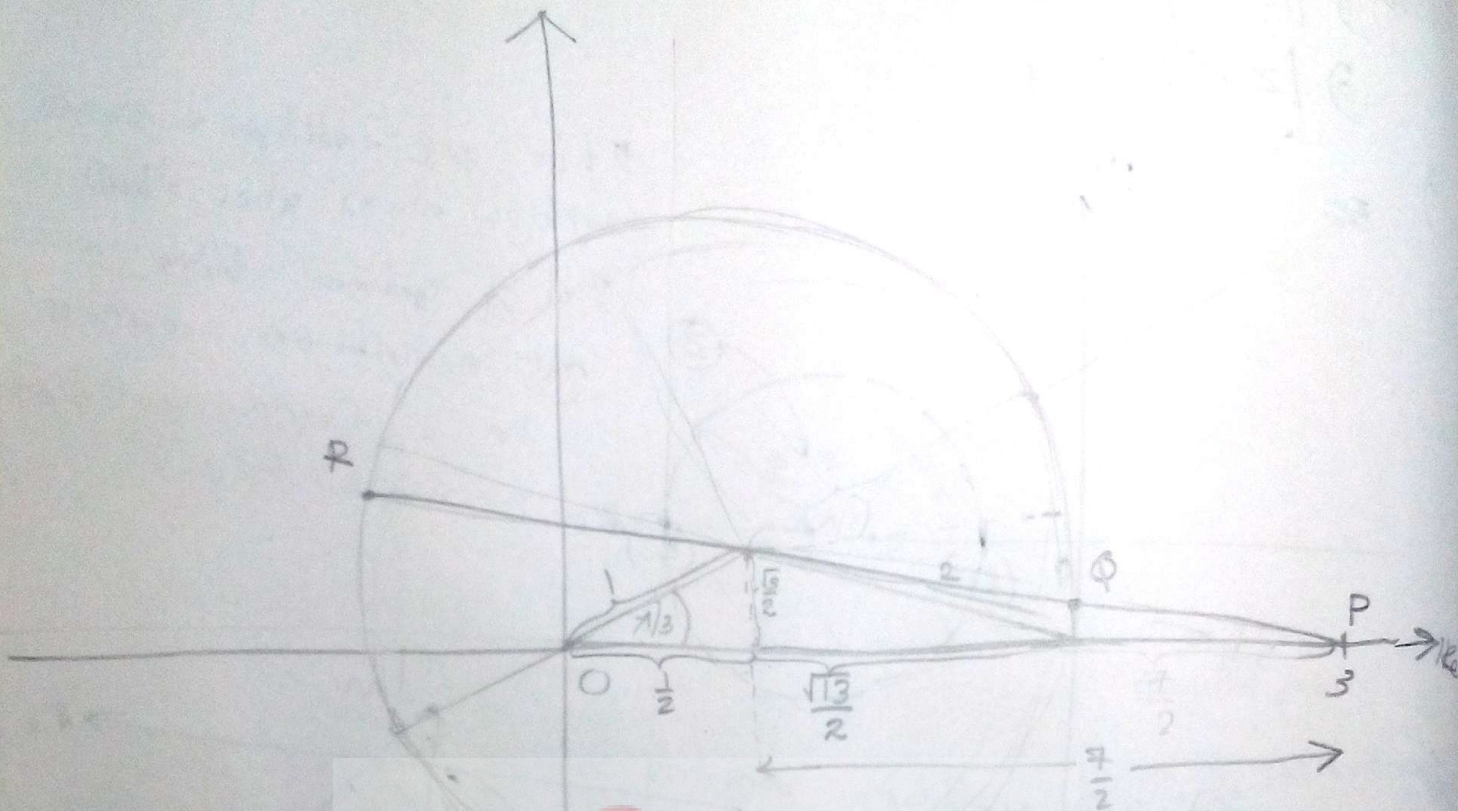


$|z+i| \geq 1$
 $|z-i| \geq 1$

2)



0+i(-1) എന്ന അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
അന്തർഗത കൃത്യമായ ചുരുക്ക
1 കി അകത്തുള്ള കൃത്യമായ
മെ Z എന്ന അക്ഷീകൃത രേഖയ്ക്കു
ചുരുക്ക.



$$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$$

$$\frac{b}{2} \approx 0.5$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\frac{13+1+2\sqrt{13}}{4}$$

$$\frac{3b}{4}$$

$$14+2\sqrt{13}$$

$$3b$$

$$\sqrt{13} < \sqrt{46}$$

$$\sqrt{13} < 4$$

$$\therefore 14+2\sqrt{13} < 22$$

$$\therefore 14+2\sqrt{13} < 3b$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2 < \frac{3b}{4}$$

$$\sqrt{13}+1 < b$$

$$\therefore \frac{\sqrt{13}+1}{2} < \frac{b}{2}$$