වෘත්ත චලිතය
Circular Motion

රුවන් දර්ශන
B.Sc. (Hons)

A

01. සුමට ඝන අර්ධ ගෝලයක තල මුහුණත තිරස් මේසයකට සවිකර ඇත. අර්ධ ගෝලයේ අරය a හා කේන්ද්‍රය O වේ. අර්ධ ගෝලයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යය A වන අතර එහි තබා ඇති P අංශුව තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරයි. මෙහි $u^2 = \frac{ag}{2}$ වේ. OP, OA සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට P අංශුව අර්ධ ගෝලය හැර නොයන අතර එහි වේගය V වේ.

(a) V^2 සඳහා ප්‍රකාශණයක් ගොඩනගන්න.

(b) $\theta = \cos^{-1} 0.9$ විට P අංශුව අර්ධගෝලය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

(c) P අංශුව අර්ධගෝලය හැරයන විට,

(i) $\cos\theta$ හි අගය සොයන්න.

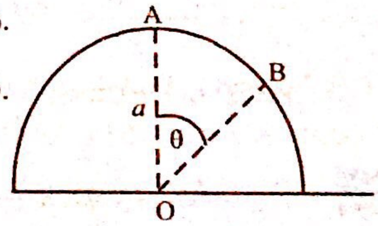
(ii) V හි අගය සොයන්න.

අර්ධගෝලය හැරයන අංශුව B ලක්ෂ්‍යයේදී මේසයේ ගැටෙයි නම්

(d) B ලක්ෂ්‍යයේදී P හි වේගය සොයන්න.

(e) P අංශුව මේසයේ වදින කෝණය සොයන්න.

02. අංශුවක් අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අචල සුමට අර්ධ ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යය වන A ලක්ෂ්‍යය මත පිහිටයි. අර්ධගෝලයේ තල මුහුණත මේසයකට සවිකර ඇත. අංශුව u තිරස් ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරයි. මෙහි $u < \sqrt{ag}$ වේ. අංශුව B හිදී අර්ධගෝලය හැරයයි. රූපයේ පරිදි OB රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.



(i) $\cos\theta$ සඳහා ප්‍රකාශණයක් u, g හා a ඇසුරින් ලබාගන්න.

(ii) අංශුව තිරස් තලය මත $\sqrt{\frac{5ag}{2}}$ වේගයකින් ගැටේ නම් θ හි අගය සොයන්න.

03. තිරස් මේසයක ඉහළ තලයට අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ සුමට ඝන ගෝලයක් සම්බන්ධ කර ඇත. P අංශුවක් ගෝලයේ A ලක්ෂ්‍යය මත තබා ඇති අතර OA උඩු සිරසට α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් ආනත වේ. අංශුව නිසලතාවයෙන් මුදා හරී. OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට P අංශුව ගෝලයේ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් හා එවිට P හි වේගය V නම්,

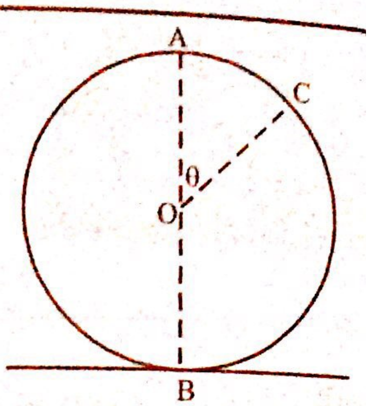
(i) $V^2 = 2ga(\cos\alpha - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. (මෙහි $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ ක් වේ.)

(ii) P අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන විට θ හි අගය කුමක්ද?

(iii) අංශුව මේසයේ වදින වේගය කුමක්ද?

Scanned with CamScanner

04. අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අචල සුමට ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යය වන A හි අංශුවක් තබා ඇත. ගෝලයේ පහළම ලක්ෂ්‍යය වන B හිදී එය තිරස් තලයකට සවිකර ඇත. අංශුව තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් ($u < \sqrt{ag}$) ප්‍රක්ෂේපණය කරයි. එවිට අංශුව C හිදී ගෝලය හැරයයි. රූපයට අනුව OC උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.



(i) $\cos\theta$ සඳහා ප්‍රකාශණයක් u, g සහ a ඇසුරින් සොයන්න.

(ii) අංශුව තිරස් තලයේ $\sqrt{\frac{9ag}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් වදී නම් θ හි අගය සොයන්න.

05. O කේන්ද්‍රය හා a අරය සහිත අචල සුමට ඝන ගෝලයක පෘෂ්ඨය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයක P නම් බර අංශුවක් රඳවා තබා පසුව එය මුදාහරිනු ලැබේ. මෙහි A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ උඩු සිරස සමග OA රේඛාව α සුළු කෝණයක් සාදන අන්දමටය. OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුව ගෝල පෘෂ්ඨය මත තවදුරටත් තිබුණහොත් අංශුවේ පෘෂ්ඨය මත තවදුරටත් තිබුණහොත් අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2ag(\cos\alpha - \cos\theta)}$ බව පෙන්වා මෙම මොහොතේදී අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. එනයින් OP රේඛාව උඩු සිරස සමග $\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\alpha}{3}\right)$ කෝණයක් සාදන විට අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

(A/L 1988)

06. අචල සුමට අරය a වන ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ස්කන්ධය 2m kg වන A අංශුවක් නිසලව ඇත. ස්කන්ධය 2m kg වන A අංශුවක් නිසලව ඇත. ස්කන්ධය mkg වන B අංශුවක් $u\ ms^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස්ව චලිත වී A හා ගැටී හා වේ. $u < 3\sqrt{ag}$ නම් සංයුක්ත අංශුව ගෝලය ස්පර්ශව සිරස් වෘත්තයක චලිත වන බව පෙන්වන්න. අංශුව වෘත්තයෙන් ඉවත්වන වේගය $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{u^2+18ag}{3}}\ ms^{-1}$ බව පෙන්වන්න. $u = \sqrt{6ag}$ නම් අංශුව වෘත්තයෙන් ඉවත් වන විට කෝණික විස්ථාපනය $\cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

07. O කේන්ද්‍රය හා am අරය වන අචල ඝන ගේලයක සුමට පෘෂ්ඨයේ P ලක්ෂ්‍යයක ස්කන්ධය mkg අංශුව තබා නිසලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. OP රේඛාව ඉහළ සිරස සමග $\cos^{-1}\frac{3}{4}$ ක කෝණයක් සාදයි. P අංශුව ඉහළ සිරසට θ ආනතද අංශුවේ වේගය $V\ ms^{-1}$ ද නම් $V^2 = \frac{ag}{2}(3 - 4\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. අංශුව මත ගෝලයෙන් ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න. OA ඉහළ සිරසට 60^0 ක් ආනත A හිදී අංශුව වෘත්තයෙන් ඉවත්වන බව පෙන්වා එම මොහොතේ වේගයද සොයන්න.

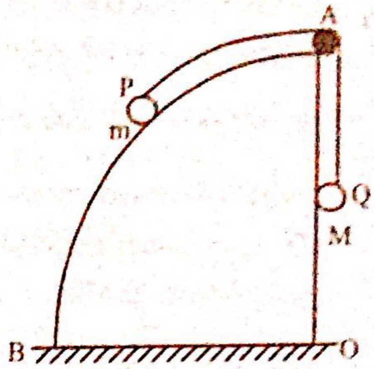
Scanned with CamScanner

(i) $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\cos\alpha - \cos\theta)$ බවත්,

(ii) අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන්නේ $\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha$ වන විටදී බවත් පෙන්වන්න.

(A/L 2002)

09. සුමට අචල ඝන වස්තුවකින් තනාගත් අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ වෘත්ත පාදයක OBA සිරස්කඩක් රූපයේ දැක්වේ. එහි මුදුනේ A හිදී සුමට කප්පියක් උඩින් වැටී ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් m හා M (m < M < 3m) ස්කන්ධ සහිත P හා Q අංශු දෙකක් ඈඳා තිබේ. P අංශුව B සමඟ සමපාත වනසේද, Q අංශුව එල්ලෙමින් පවතින සේද අංශු තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරින ලදී. t වේලාවේදී



POB $\measuredangle = \theta$ නම්, $\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 = \frac{2g}{a}\left[\frac{M\theta - m\sin\theta}{M+m}\right]$ බව පෙන්වන්න.

10. a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් සුමට අර්ධ ගෝලයක් එහි පතුල තිරස් තලයක පිහිටන සේ සවිකර තිබේ. m ස්කන්ධයෙන් යුතු P නම් බර අංශුවක් අර්ධ ගෝලයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව තිබී මදක් විස්ථාපනය කළ පසු, අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සර්පණය වෙයි.

OP අරය උඩු සිරස සමඟ $\theta \left(< \frac{1}{2}\pi\right)$ කෝණයක් සාදන විට,

(i) P ගේ ප්‍රවේගයත්, (ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

අංශුව අර්ධ ගෝලයේ පෘෂ්ඨයේ ඉවත්ව යන විට P ගේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සංරචකත්, සිරස් සංරචකත් පිළිවෙලින් $\frac{\sqrt{24ag}}{9}$ ද $\frac{\sqrt{30ag}}{9}$ බව පෙන්වන්න. (A/L 1994)

11. දෘඪ ලෙස සවිකොට ඇති අර්ධ විෂ්කම්භය r වන සුමට ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට නිශ්චලව සිට අංශුවක් පහළට සර්පණය වේ. මෙම අංශුව වෘත්තාකාර මාර්ගයක හැරයන විට ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{r}{3}$ දුරක් සිරස් ලෙස පහළට බැස ඇති බව පෙන්වන්න.

12. O කේන්ද්‍රය සහ a අරය සහිත සුමට ගෝලයක්, මේසයක තිරස් පෘෂ්ඨය මතට සවිකර ඇත. සුමට P අංශුවක් ගෝලයෙහි පිටත පෘෂ්ඨයෙහි A ලක්ෂ්‍යයක තබනු ලැබේ. මෙහි OA උඩු සිරස සමඟ α සුළු කෝණයක් සාදයි. අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

(i) OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට, අංශුව තවමත් ගෝල පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් $a\dot{\theta}^2 = 2g(\cos\alpha - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ගෝලය සහ අංශුව අතර ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

(iii) මේසයේ පෘෂ්ඨයේ සිට $a\left(1 + \frac{2}{3}\cos\alpha\right)$ උසකදී, අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත්ව යන බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(iv) ගෝලයෙහි සිරස් විෂ්කම්භයේ සිට, අංශුව මේසයට වදින ලක්ෂ්‍යයට දුර d යැයි ගනිමු. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ යැයි දී ඇති විට d සොයන්න. (A/L 2007)

13. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ අචල ගෝලයක සුමට බාහිර පෘෂ්ඨයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය 2m වූ වෙනත් Q අංශුවක් තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් P සමඟ සරල ලෙස ගැටෙයි. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
OP අරය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට තවමත් P අංශුව ගෝලය සමඟ ස්පර්ශව ඇතැයි උපකල්පනය කරමින්, P අංශුව මත ගෝලය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{m}{a}\,[ga\,(3\cos\theta - 2) - u^2]$ බව පෙන්වන්න.
$u = \sqrt{ga}$ නම්, Q සමඟ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව ගෝලීය පෘෂ්ඨය හැර යන බවද පෙන්වන්න. (A/L 2013)

14. ගුරුත්වය යටතේ නිදැල්ලේ වැටෙන අංශුවක්, අරය a වන අචල සුමට ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යය පවත්නා මට්ටමේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරක් පහළින් වූ ගෝලය මත ලක්ෂ්‍යයකදී u ප්‍රවේගයෙන් එහි වදී. ගැටුම අප්‍රත්‍යස්ථ වේ. $u^2 > \frac{2}{3}ag$ නම්, අංශුව හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව සිරස සමග β කෝණයක් ආනත වන පිහිටීමේදී අංශුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\cos\beta = \frac{1}{3} + \frac{u^2}{4ag}$

15. අර්ධ විෂ්කම්භය a වන වෘත්තාකාර සුමට සිලින්ඩරයක් එහි අක්ෂ තිරස්ව පිහිටන සේ සවිකොට ඒ මතින් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් පන්නා තිබේ. තන්තුවේ එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ A අංශුවක්ද, අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය 2m වූ B අංශුවක් ද අමුණා, B අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පවතින සේද A අංශුව සිලින්ඩරයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ගැටෙන සේ ද අංශු දෙක සකස්කොට පද්ධතිය නිදහසේ චලනය වීමට හරිනු ලැබේ. සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බ සිරස් තලයේ අංශු දෙක චලනය වන්නේ නම්, $a\theta$ චාප දුරක් සිලින්ඩරය මත චලනය වීමෙන් පසු A අංශුව වෘත්තාකාර මාර්ගය හැරයන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ වල අගය $4\theta = 5\sin\theta\ (\theta < \frac{\pi}{2})$ වලින් ලැබේ.

16. ස්කන්ධය m වූ A අංශුවක් කේන්ද්‍රය O වූ ද, අරය a වූද අචල සුමට ගෝලයක පෘෂ්ඨය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයක තබා OP උඩු සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ සුළු කෝණයක් සාදන විට අංශුව සීරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. OA උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුව තවදුරටත් පෘෂ්ඨය මත පවතී යැයි සලකා අංශුවේ V ප්‍රවේගය $V^2 = \frac{ag}{2}(3 - 4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

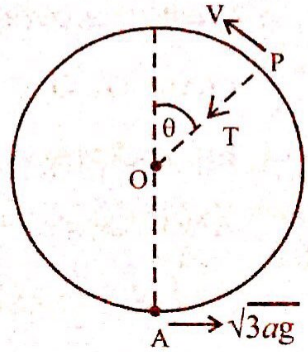
තවද, මෙම මොහොතේදී අංශුව මත අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න. අංශුව පෘෂ්ඨය හැර යන්නේ OA උඩු සිරස සමඟ $\frac{\pi}{3}$ ක කෝණයක් සාදන විට බැව් අපෝහනය කරන්න.

17. අක්ෂය තිරස්ව පවතින අරය a වන සිලින්ඩරයක මතුපිට පෘෂ්ඨය සුමට වන අතර එහි ඉහළම ලක්ෂ්‍යය වන A හි ස්කන්ධය m වන අංශුවක් නිසලව තබා සීරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. එවිට එම අංශුව සිරස් වෘත්තාකාර චලිතයක් ඇතිකරනු ලබන අතර පෘෂ්ඨය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයකදී අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වේ. A සිට C ට ඇති සිරස් උස සොයන්න. අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්වීමෙන් අනතුරුව ගුරුත්වය යටතේ චලිත වන අතර C සිට a දුරක් ගමන් කරන විට එය චලිත වන සිරස් උස $\frac{1}{16}a(8\sqrt{5}+27)$ බව පෙන්වන්න.

18. අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ සුමට අචල ඝන ගෝලයක ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රවේගයකින් බර අංශුවක් සීරුවෙන්, තිරස් අතට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව ගෝලයේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යය හරහා පිහිටි තිරස් තලයෙහි සිරස් විෂ්කම්භයේ සිට $\frac{5(4\sqrt{2}+\sqrt{5})}{27}$ දුරක දී වදින බව පෙන්වන්න.

B

19. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට අමුණා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට අමුණා ඇත. O ලක්ෂ්‍යය A ලක්ෂ්‍යයට සිරස්ව a දුරක් ඉහළින් පිහිටයි. A සිට අංශුව තිරස් $\sqrt{3ag}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරන ලදී. උඩු සිරස සමඟ අංශුව θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුව නොබුරුල් වන අතර රූපයේ පරිදි තන්තුවේ ආතතිය T හා P හි වේගය V වේ.



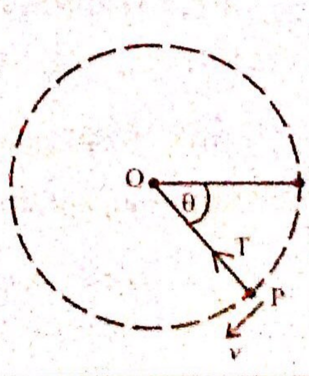
(i) V^2 සඳහා ප්‍රකාශණයක් a, g සහ θ ඇසුරින් ලබාගන්න.

(ii) T = Mg (1 3 cos θ) බව පෙන්වන්න.

(iii) A ට ඉහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේදී තන්තුව බුරුල් වේ නම් a ඇසුරින් AB සිරස් උස සොයන්න.

(iv) තන්තුව බුරුල් වූ පසු අංශුව ළඟාවන උපරිම ලක්ෂ්‍යය C නම් BC උස a ඇසුරින් සොයන්න.

20. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට අමුණා ඇත. තන්තුව නොබුරුල්ව පවතින පරිදි OP තිරස්ව තබා ඇත. ඉන්පසු අංශුව $u^2 = \frac{3ga}{2}$ වන පරිදි u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේපණය කරන ලදී. OP, θ කෝණයක් හැරුණු විට තන්තුව තවදුරටත් නොබුරුල් වන අතර රූපයේ පරිදි P හි වේගය V හා තන්තුවේ ආතතිය T වේ.



(i) V^2 සඳහා ප්‍රකාශනයක් a, g සහ θ ඇසුරින් ලබාගන්න.

(ii) m, g හා θ ඇසුරින් T සඳහා ප්‍රකාශණයක් ගොඩනගන්න.

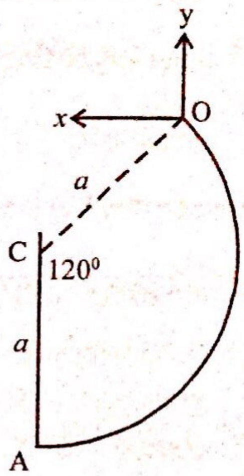
(iii) $\theta = 210^0$ ක් විට තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

(iv) තන්තුව වෙනුවට සැහැල්ලු දණ්ඩක් භාවිතා කළ විට P ට සම්පූර්ණ වෘත්තයක් යාමට හැකිද නොහැකිද යන්න හේතු සහිතව දක්වන්න.

(v) තන්තුව බුරුල් වූ පසු අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලිත වේ. එහිදී O හරහා යන තලයේ ඇති A ලක්ෂ්‍යය හරහා අංශුව ගමන් කරයි. A හිදී අංශුවේ වේගය $\sqrt{\frac{3ga}{2}}$ ක් වීමට හේතුව විස්තර කරන්න.

(vi) A හිදී P අංශුවේ චලිත දිශාව තිරස සමඟ φ කෝණයක් සාදයි නම් φ හි අගය සොයන්න.

21. අරය am වන කේන්ද්‍රය C වන සුමට අවල කම්බියකින් කොටසක් රූපයේ දැක්වේ. $A\hat{C}O = 120^0$ වේ. ACO සිරස් තලයේ ඇත. AC සිරස් වන අතර වෘත්ත චාපයේ පහළම ලක්ෂ්‍යය A වේ. ස්කන්ධය m වන පබළුවක් කම්බියේ චලිත වීමට නිදහස් වේ.
A වලින් පබළුව $\sqrt{6ag}$ ms^{-1} ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. පබළුව O හිදී $\sqrt{3ag}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප වන බව පෙන්වන්න. O තුළින් රූපයේ Ox, Oy ට සාපේක්ෂව අංශුවේ පෙත $y = x\sqrt{3} - \frac{2x^2}{3a}$ බව පෙන්වන්න.



A සිට පබළුවේ උපරිම උස සොයන්න. අංශුව A තුළින් තිරස් තලයේ වදින ලක්ෂ්‍යයට O සිට තිරස් දුර $\frac{3a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ බව පෙන්වන්න.

22. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග l වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අවල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර, අංශුව ගුරුත්වය යටතේ සමතුලිතව පවතී.

අංශුව ඊළඟට $\sqrt{\frac{15gl}{2}}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ.

(i) O ඔස්සේ යන උඩු අත් සිරස සමග තන්තුව θ කෝණයක් සාදන විට එහි ආතතිය, $mg\left(\frac{7}{4} - 3\cos\theta\right)$ බව පෙන්වන්න.

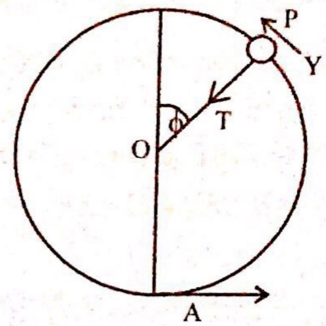
(ii) අංශුව පූර්ණ වෘත්ත චලිතයක් ඇති කළ නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

(iii) $\theta = 60^0$ විට O සිට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සවිකර ඇති නාදැත්තක තන්තුව ගැටෙයි. අනතුරුව අංශුව, නාදැත්ත කේන්ද්‍ර වූ වෘත්ත චලිතයක යෙදෙයි. එවිට ද, අංශුව පූර්ණ වෘත්ත චලිතයක් ඇති නොකරන බව සාධනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

23. දිග a වන OP ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට ගැට ගසා ඇති ස්කන්ධය m වන P අංශුවක්, තන්තුව ඇදී පවතිමින්, කේන්ද්‍රය O වන පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක භ්‍රමණය වෙයි. පහළම පිහිටීමේදී P හි ප්‍රවේගය V නම් OP රේඛාව යටි සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ T ආතතිය, $T = \frac{m}{a}\left[V^2 - 2ag + 3ag\cos\theta\right]$ $V^2 > 5ag$ බවත් පෙන්වන්න. තවද, ඉහළ ම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය $\frac{V}{2}$ නම් V නිර්ණය කර, P අංශුව පහළ ම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් ඉහළ ම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් අනුපාතය 19 : 1 බව පෙන්වන්න.

24. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුව a දිගැති සිහින් අවිතන්‍ය තන්තුවකට සම්බන්ධ කර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර පහළින් පිහිටි A ස්ථානයේ සිරස් තලයේ නිසලව පවතී. මෙම අංශුවට $\sqrt{3ag}$ නම් තිරස් ප්‍රවේගයක් ලබාදුන් විට P අංශුව තිරස් තලයේ වෘත්තාකාර මාර්ගයක ගොස් සිරස් උඩු අත සමඟ ϕ කෝණයක් සාදමින් P ස්ථානයට පැමිණේ. P හිදී අංශුවේ ප්‍රවේගය V වේ. තන්තුවේ ආතතිය T වේ.



(i) a , g , ϕ ඇසුරින් V^2 සොයන්න.

(ii) $T = (1 - 3\cos\phi)\,mg$ බව

(iii) අංශුව B ස්ථානයට පැමිණි විට තන්තුව බුරුල් වේ නම්, A හි සිට B ට ඇති $\sqrt{3ag}$ සොයන්න.

25. දිග l වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් 2m ස්කන්ධය වූ අංශුවක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා අංශුව එල්ලෙමින් නිසලව පවතී. ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේපණ කරනු ලබන්නේ නිසලව පවතින අංශුව සමග සරලව ගැටෙනසේය. ගැටීමෙන් පසු පළමු අංශුව ක්ෂණික නිසලතාවයට පැමිණීමට පෙර, තන්තුව යටි සිරසට 60^0 කෝණයක් ආනත කරයි. අංශුව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ නම් ගැටීමට මොහොතකට පෙර ස්කන්ධය m වන අංශුවේ ප්‍රවේගය $\frac{9}{4}\sqrt{gl}$ බව පෙන්වන්න.

ගැටීමෙන් මෙහොතකට පසු තන්තුවේ 4mg ආතතිය බව ද පෙන්වන්න.

26. OA ලුහු අවිතන්‍ය දණ්ඩක දිග b වන අතර එය සිරස් ලෙස එල්ලී පවතින්නේ ඉහළ අන්තය අචල O ලක්ෂ්‍යයකට අසව්කොට පහළ A අන්තයට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඇදීමෙනි. අංශුව තිරස් $5u$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එවිට අංශුව පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක් ගෙවා යයි. වෘත්තාකාර පෙතෙහි ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය $3u$ නම් $u^2 = \frac{1}{4}gb$ බව පෙන්වන්න. යටි සිරස සමග OA, θ කෝණයක් තනයි නම් $b\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}(17 + 8\cos\theta)\,g$ බව පෙන්වා දණ්ඩෙහි ආතතිය ද සොයන්න.

Scanned with CamScanner

27. දිග l වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් අවල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. අංශුවේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{2gh}$ තිරස් ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කළ විට තන්තුවේ වැඩිතම ආතතිය සොයන්න. ඉන්පසු ඇතිවන චලිතයේ දී තන්තුව හැකිලෙයි නම්,

(i) $h > l$ බවත්,

(ii) තන්තුවේ හැකිලීම පළමුව සිදුවන්නේ අංශුව A හි පිහිටන විට නම් O සිට A ලක්ෂ්‍යයට උස $\frac{2}{3}(h - l)$ බවත්,

(iii) අංශුව A ට ඉහළින් නගින වැඩිතම උස $(h - l)(l + 2h)(5l - 2h) / 27 l^2$ බවත් පෙන්වන්න.

28. am දිග අවිතන්‍ය තන්තුවකින් අවල O ලක්ෂ්‍යයෙන් ස්කන්ධය m kg වන P අංශුවක් එල්ලා ඇත. අංශුව තිරස්ව $\sqrt{kag}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. තන්තුව තිරස් විට P අංශුව ස්කන්ධය 2m kg වන Q අංශුවක් හා වේ. අනතුරුව චලිතයේ දී සංයුක්ත අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක චලිත වේ නම්, k හි අවම අගය සොයන්න.

29. P අංශුවක් a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ඇසුරෙන් O අවල ලක්ෂ්‍යයකට සබැඳ තිබේ. O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් a උසකදී P අල්ලා තබාගෙන එය තිරස් දිශාවක් ඔස්සේ u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ.

(i) $u^2 \geq ag$ නම්, P අංශුව සම්පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $u^2 < ag$ නම්, P අංශුව $2\left\{\frac{a}{g}\left(1 - \frac{u^2}{ag}\right)\right\}^{1/2}$ කාලයක් ගුරුත්වය යටතේ නිදැල්ලේ චලනය වන බව පෙන්වන්න.

30. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් O අවල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. තන්තුව නොබුරුල්ව හා යටි අත් සිරස සමග $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන අයුරින් අංශුව රඳාව ඇති විට අංශුවට OP ඔස්සේ යන සිරස් තලයෙහි තන්තුවට ලම්භව u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි. අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙහි යෙදෙන බව උපකල්පනය කරමින් OP යටි අත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ පිහිටුම සැලකීමෙන් අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ලියා දක්වන්න. $ga(3 + 2\cos\alpha) > u^2 > 2ga\cos\alpha$ වෙතොත් යටි අත් සිරස සමග OP $\cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha - \frac{u^2}{ga}\right)\right]$ කෝණයක් සාදන තෙක් අංශුව වෘත්තාකාර චාපයක් සලකුණු කරන බවත්, අනතුරුව ගුරුත්වය යටතේ නිදහස්ව චලනය වීමට ආරම්භ කරන බවත් පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

31. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග l වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර, අංශුව ගුරුත්වය යටතේ සමතුලිතව පවතී. අංශුව ඊළඟට u වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) O ඔස්සේ යටත යටි අත් සිරස සමඟ තන්තුව θ කෝණයක් සාදන විට එහි ආතතිය $m\left(3g\cos\theta - 2g + \dfrac{u^2}{l}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පසුව අංශුව O හි තිරස් මට්ටමට ළඟාවීමට හැකිවන පරිදි u ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය සොයන්න.

(iii) තන්තුව පළමු වරට තිරස් වන විට එහි චලන තලයට ලම්බව O සිට $\dfrac{l}{2}$ දුරකින් සවිකර ඇති සිහින් තිරස් දණ්ඩක් සමඟ ස්පර්ශ වෙයි.

$2gl < u^2 < \dfrac{7}{2}gl$ වෙයි නම්, අංශුව දණ්ඩේ මට්ටමෙන් $\dfrac{l}{2}$ උසකින් පිහිටි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට පෙර තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

32. අංශුවක් දිග a වන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. අංශුව තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කළ විට සිරස් තලයේ සිරස් වෘත්තයක කොටසක් ගෙවා යයි. තන්තුව හැකිලීමෙන් පසු අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි නම් අංශුවේ ප්‍රක්ෂේපණ ප්‍රවේගය $\sqrt{\dfrac{7ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න. ඉන්පසු ඇතිවන චලිතයේ දී ආරම්භක පිහිටීමේ සිට $\dfrac{a}{16}$ උසින් වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දෝලනය වන බව පෙන්වන්න.

33. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග $2a$ වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට සම්බන්ධ කොට තිබේ. අංශුව A අචල ලක්ෂ්‍යයක තන්තුව මගින් සම්බන්ධ කොට සිරස් ලෙස පහළට එල්ලෙමින් පවතී. තන්තුවේ භේදක ආතතිය 10mg වන අතර අංශුව $4\sqrt{ag}$ වේගයෙන් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරයි. ඉක්බිති ඇතිවන චලිතයේදී තන්තුව නොකැඩෙන බව පෙන්වන්න. තන්තුව තිරස්වත්ම A සිට a දුරින් පිහිටි P අචල නාදැත්තක තන්තුව ගැටී අංශුව P වටා භ්‍රමණය වීමට පටන් ගනී. නාදැත්තේ ගැටුනු විගස තන්තුව කැඩෙන බව පෙන්වන්න.

34. ස්කන්ධය m වන අංශුවක් ස්කන්ධය M වන පියන වසන ලද පෙට්ටියක පියනෙන් එල්ලෙමින් පවතින දිග a වන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක අමුණා ඇත. පෙට්ටිය රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව තබා ඇත. තන්තුව තදට සිටින සේ අංශුව පියනට ළංව තබා මුදාහරිනු ලැබේ. පෙට්ටිය චලනය නොවේ යැයි උපකල්පනය කරමින් මේසයෙන් පෙට්ටියට ඇතිකරන ලද ඝර්ෂණ බලය හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. පෙට්ටිය ඇල නොවී පවතී යැයි උපකල්පනය කර පෙට්ටිය ලිස්සා නොයාමට අවශ්‍යතාව $\mu \geq \dfrac{3.m}{2\sqrt{M.(M+3m)}}$ බව පෙන්වන්න.

μ යනු පෙට්ටිය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

Scanned with CamScanner

35. a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් එක් කෙළවරක් පිරිපුන් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවයෙහි තිබෙන M ස්කන්ධයෙන් යුත් A භාරයකට ඇඳා තිබේ. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර m ස්කන්ධයෙන් යුත් B අංශුවකට ඇඳා තිබේ. B අංශුව A සිට a දුරකින් අල්ලා තබාගෙන සිරස් ලෙස උඩු අතට $u(3 \leq u^2 / ag \leq 6)$ ප්‍රවේගයෙන් මේසයේ සිට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. A භාරය නිශ්චලතාවයේ ඇතැයි උපකල්පනය කර AB තන්තුව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

A භාරය මත මේසයේ අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව $M.g. \left[1 - \frac{m}{M} \sin\theta . \left(\frac{u^2}{ag} - 3\sin\theta\right)\right]$ බව පෙන්වන්න.

මේ ප්‍රකාශනයේ අඩුතම අගය සොයන්න. මේ නයින් $\frac{m}{M} > \frac{1}{12} . \left(\frac{u^2}{a.g}\right)^2$ නම්, අර්ධ වෘත්තයක් ගෙවායත්ම භාරය මේසයත් සමඟ ස්පර්ශ වී පවත්නා බව පෙන්වන්න.

36. දෘඪ ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් බර අංශුවක් නිදහසේ එල්ලා තිබේ. මෙම අංශුවට u තිරස් ආරම්භක ප්‍රවේගයක් ගෙනදෙනු ලැබේ. තන්තුව උඩුඅත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය v ද තන්තුවේ ආතතිය T ද වේ.

$v^2 = u^2 - 2gl - 2gl\cos\theta$ බව ද, $T = \frac{m}{l}(u^2 - 2gl - 3gl\cos\theta)$ බව ද පෙන්වන්න.

$\theta = \alpha$ වන අවස්ථාවේදී තන්තුව බුරුල්වේ නම්, $3\cos\alpha = \frac{u^2}{gl} - 2$ බව පෙන්වන්න. තන්තුව බුරුල් වන මොහොතේ අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{gl\cos\alpha}$ බව පෙන්වා තන්තුව බුරුල්ව පවතින කාලය $\sqrt{\frac{8l}{g}\sin\alpha\sin 2\alpha}$ බව ද පෙන්වන්න.

C

37. අරය a වන අචල සුමට කුහර ගෝලයක ඇතුළත පහළම A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ස්කන්ධය m වන අංශුවක් $\sqrt{\frac{7ga}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරයි. අංශුව A ට ඉහළින් $\frac{3a}{2}$ උසින් වූ ලක්ෂ්‍යයකදී ගෝලය හැරයන බවත්, ඉන්පසු අංශුව නැවත ආරම්භක A ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බවත් පෙන්වන්න.

38. අභ්‍යන්තර අරය a වූ සුමට අචල කුහර ගෝලයක ඇතුල් පැත්තේ චලිතය වීමට නිදහස ඇති අංශුවක් එහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වන A වලින් $2(ga)^{1/2}$ තිරස් වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරන ලදී. A සිට $\frac{5a}{3}$ දුරක් ඉහළදී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන බව පෙන්වා එය A සිට ඉහළ නගින උපරිම උස $\frac{50a}{27}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

39. කේන්ද්‍රය O සහ අභ්‍යන්තර අරය a වූ අචල කුහර ගෝලයක සුමට අන්තඃපෘෂ්ඨය මත චලනය වීමට නිදහස ඇති P අංශුවක් එම පෘෂ්ඨයේ පහත්ම A ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. ඊළඟට අංශුව ආරම්භක $\sqrt{nga}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. $n > 0$ වේ. අංශුව පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශව තිබෙන අතරතුරේදී OP කෝණය θ වන විට පෘෂ්ඨයෙන් අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $2 < n < 5$ වෙයි නම්, $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,ga}{3}}$ වේගයක් සහිතව P අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වනබව පෙන්වන්න. පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත්වන්නේ නම් O හි මට්ටමෙන් $\dfrac{a}{2}$ උසක තිබිය දී නම්,

(i) $n = \dfrac{7}{2}$ බවත්,

(ii) ගුරුත්වයට යටතේ පසුව සිදුවන නිදහස් චලිතයේදී P හි පෙත A හරහා යන බවත් පෙන්වන්න.

40. අර්ධ විෂ්කම්භය r වූ සුමට අචල සිරස් වෘත්තාකාර වළල්ලක ඇතුළත එහි පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. $2rg < u^2 < 5rg$ නම්, අංශුව වළල්ල අතහැර යන බව ද, වළල්ල අතහැර යාමෙන් පසු කේන්ද්‍රය මැදින් ගමන් කරන්නේ නම්,

$r = \dfrac{u^2}{g(\sqrt{3}+2)}$ බව ද පෙන්වන්න.

41. අර්ධ විෂ්කම්භය r වූ සුමට අචල සිරස් වෘත්තාකාර වළල්ලක ඇතුළත එහි පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. $Org < u^2 < 5rg$ නම්, අංශුව වළල්ල අතහැර යන බවද වළල්ල අතහැර යාමෙන් පසු කේන්ද්‍රය මැදින් අංශුව ගමන් කරන්නේ නම්, $u'' = rg\,(2+\sqrt{3})$ බවද පෙන්වන්න.

42. අභ්‍යන්තර අරය a වූ අචල සුමට ගෝලාකාර පාත්‍රයක් ඇතුළත අංශුවකට චලිත වීමට නිදහස්ය. ගෝලයේ පහළම A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $2\sqrt{ga}$ තිරස් ප්‍රවේගයෙන් අංශුව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. A ට $\dfrac{5a}{3}$ උසක දී අංශුව පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්වන බව පෙන්වන්න. ඉන්පසු අංශුව A සිට ගමන් කරන උපරිම උස $\dfrac{50a}{27}$ බව ද පෙන්වන්න.

43. සුමට වෘත්තාකාර වළල්ලක් සිරස් තලයක අචලව සවිකර තිබේ. වළල්ලේ ඇතුළත ස්පර්ශ කරන අංශුවක් කේන්ද්‍රයට යා කරන අරය යටි සිරස සමඟ θ කෝණයක් ආනත කරන පිහිටීමේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය v වෙයි. අංශුව සහ වළල්ල අතර ප්‍රතික්‍රියාව $m\dfrac{v^2}{r} + mg\cos\theta$ බව පෙන්වන්න. r යනු වළල්ලේ ඇතුළත වෘත්තයේ අරයයි. අංශුව පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක චලිත වන අතර පහළම ලක්ෂ්‍යයේදී ප්‍රතික්‍රියාව ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතික්‍රියාව මෙන් හතර ගුණයකි. පහළම ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{7gr}$ බව පෙන්වන්න.

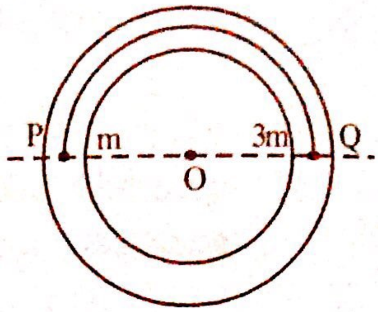
පහළම ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතික්‍රියාවෙන් හරි අඩක් වූ ප්‍රතික්‍රියාවක් පවතින්නේ වළල්ලේ කවර ලක්ෂ්‍යයේදීද?

Scanned with CamScanner

44. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් අචලව සිරස් තලයක පිහිටි අරය a වූ වළල්ලක් ඇතුළත 180^0 කින් දෝලනය වෙයි. ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී වළල්ල මත යෙදෙන බලය $\frac{3mv^2}{2a}$ බව පෙන්වන්න. v අංශුවේ ප්‍රවේගය වෙයි.

D

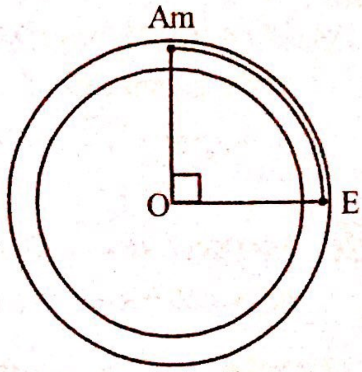
45. රූපයේ දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O හරහා හා අරය a වූ වෘත්තයක ආකාරයට නමන ලද පටු සුමට නලයකි. එය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, 3m වූ P, Q අංශු දෙකක් දිග πa වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කරනු ලැබ නලය තුළ බහා ඇත. ආරම්භයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ.



මුදාහළ මොහොතේ සිට t කාලයකදී θ කෝණයකින් OP හැරී ඇත්නම් ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta \left[0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

මෙම මොහොතේදී නලයෙන් අංශුව මත යෙදෙන බලය සොයන්න.

46. සුමට සිහින් වෘත්තාකාර නලයක අරය $2a$ වේ. නලය සිරස් තලයේ අචලව ඇත. πa දිග අවිතන්‍ය තන්තුව දෙකෙළවර m ස්කන්ධය ඇති අංශු දෙකක් සවිකර රූපයේ ආකාරයට තබා මුදාහරිනු ලැබේ. t කාලයේ දී OA ඉහළ සිරසට θ ආනත විට තන්තුව ඇදී ඇත.



$4a\ddot{\theta} = g(\sin\theta + \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. එවිට තන්තුවේ ආතතිය $\frac{mg}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$ බව පෙන්වා තන්තුව හැකිලෙන විට $\theta = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

47. අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳන ලද පිළිවෙලින් ස්කන්ධ 8m, 4m, kg වන කුඩා A, B මුදු දෙකක් සිරස් සුමට කේන්ද්‍රය O වන වෘත්තාකාර කම්බියක චලිත වීමට නිදහස් වේ. AB කේන්ද්‍රයේ 60^0 කෝණයක් ආපාතනය කරයි. t = 0 විට, A, B එකම තිරස් රේඛාවේ O ට ඉහළින් තන්තුව තිරස්ව තබා නිසලතාවයෙන් පද්ධතිය මුදාහරිනු ලැබේ. තන්තුව තිරසට θ ආනත විට $\theta^2 = \frac{g}{3a}(\sin\theta - 3\sqrt{3}\cos\theta + 3\sqrt{3})$ බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{163}{8}mg\cos\theta$ බව පෙන්වන්න. B අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව ද ලබාගන්න.

Scanned with CamScanner

48. ස්කන්ධය m සහ km (k > 1) වූ පබලු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා ඇත. සිරස් තලයක අචලව ඇති සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක් ඔස්සේ චලනය වීමට හරිනු ලැබේ. තන්තුව තදව ඇතිව තිරස් පිහිටීමක තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. කම්බියේ අරය a ද, තන්තුව තදව ඇති විට එය කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණය 2α ද, නම්, තන්තුව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(k+1)a}\left[(k+1)\cos\alpha - k\cos\alpha\;(\theta+\alpha) - \cos(\theta-\alpha)\right]$$ බව පෙන්වන්න.

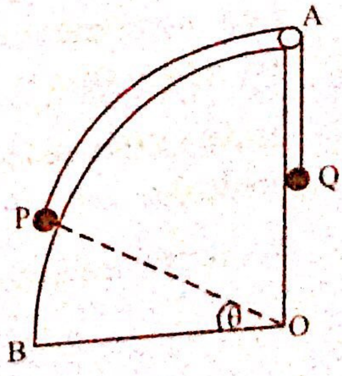
තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

49. සුමට පටු කුහර බටයක් කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වූ වෘත්තයක හැඩයට නමා එහි තලය සිරස්ව තිබෙන සේ සවිකර ඇත. පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m හා km වන P හා Q අංශු දෙක $\frac{\pi.a}{2}$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ඈඳා බටය තුළ තබා ඇත්තේ O සිරස් ලෙස ඉහළින් P ද, O හා එකම මට්ටමේ Q ද පිහිටන පරිදිය. තන්තුව බටය තුළ වෙයි. $t = 0$ කාලයේදී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබෙයි. t කාලයක දී OP සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්, යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය උපයෝගී කරගෙන තන්තුව නොබුරුල්ව පැවතුනහොත් $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a.(1+k)}(\sin\theta + k.\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$ විට පමණක් ඉහත සමීකරණය වලංගු වන බව අපෝහනය කරන්න. P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $k > 3 - 2\sqrt{2}$ නම්, තන්තුව බුරුල් වීමට පෙර ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.

E

50. P සහ Q අංශු දෙකක් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කොට තිබේ. එක් එක් අංශුවේ ස්කන්ධය m වෙයි. අක්ෂය තිරස් වන සේ සවිකර ඇති අචල අරය a වූ සුමට සිලින්ඩරයක ඉහළම ජනකය මත වූ ලක්ෂ්‍යයේ P පිහිටන සේ ද Q අංශුව එල්ලෙමින් පවතින සේ ද තන්තුව සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බව තබා තිබේ. P අංශුව මුදාහැරයේ නම් P අංශුව සමඟ ඇඳි අරය උඩු සිරසට α කෝණයක් ආනත පිහිටීමේ දී සිලින්ඩරයෙන් ඉවත් වෙයි නම්, $2\cos\alpha - 1 - \alpha = 0$ බව පෙන්වන්න. P සිලින්ඩරයෙන් ඉවත්වන මොහොතේ දී තන්තුවේ ආතතිය α මගින් සොයන්න.

51. P සහ Q අංශු දෙකක් ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m සහ M (M > m) වන අතර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ඒවා ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කොට තන්තුව A හි පිහිටි සුමට කප්පියක් උඩින් වැටී ඇත. AOB යනු සුමට අචල ඝන වස්තුවක් ද එහි හරස්කඩ වෘත්ත පාදයක හැඩය ද ගනී. ආරම්භයේදී P අංශුව B හි තබා පද්ධතිය මුදා හරී. t කාලයක ආරම්භයේදී P අංශුව B හි තබා පද්ධතිය මුදා හරී. t කාලයක දී OP සහ OB අතර කෝණය θ වේ. $(M+m)a\dot{\theta}^2 = 2g(M\theta - m\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.



Scanned with CamScanner

(i) P අංශුව සහ වක්‍ර පෘෂ්ඨය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $R = \frac{mg}{M + m}[(M + 3m)\sin\theta - 2M\theta]$ බව පෙන්වන්න.

R උපරිම වන විට $\theta = \alpha$ ද $\cos\alpha = \frac{2M}{M + 3m}$ බව පෙන්වන්න.

එවිට $M < 3m$ බව ද පෙන්වන්න.

(ii) $\theta = 0$ හෝ $\theta = \beta$ වන විට R අතුරුදහන් වන බව පෙන්වා එවිට $\frac{3m}{M} < (\pi - 1)$ බව ද $\beta = \sin^{-1}\frac{2M\beta}{M + 3m}$ බව ද පෙන්වන්න.

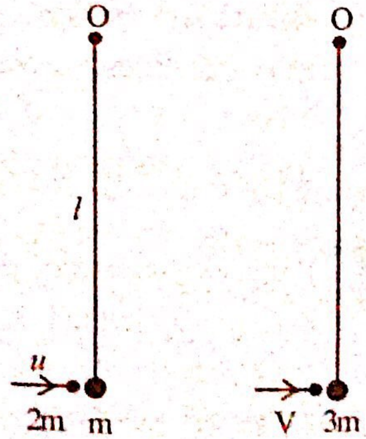
52. දිග a වූ ලුහු තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැටගසා ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳා තිබේ. තන්තුව නොහැකිලී පවතින සේ ද අංශුව අචල ලක්ෂ්‍යයකට සිරස් ලෙස a උඩින් පිහිටන සේ ද අල්ලා තබා තිරස් u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. අංශුව නැවත තිරස් ලෙස චලිත වන විට එහි ප්‍රවේගය v නම්,

$u^2 > ga$ වන විට $v^2 = u^2 + 4ga$ බවත් පෙන්වන්න.

$u^2 < ga$ වන විට තන්තු නැවත ඇදීමට පටන්ගන්නා විට තන්තුව යටි සිරසට ආනත කෝණය $\cos^{-1}\left(1 - \frac{2u^2}{ga}\right)$ බව පෙන්වන්න.

53. a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා තිබේ. එහි නිදහස් කෙළවර m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් දරයි. P අංශුව O හා එකම තිරස් මට්ටමෙහි O සිට $a \sin\alpha$ දුරකින් අල්ලා තබාගනු ලැබේ. ඉන්පසුව එය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. OP තන්තුව යටියත් සිරසට $\cos^{-1}(\cos^3\alpha)$ කෝණයකින් ආනත වූ විට P අංශුව නැවතත් ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට එළඹෙන බව පෙන්වන්න. අනතුරුව සිදුවන අංශුවේ චලිතයේදී තන්තුවෙහි උපරිම හා අවම ආතති සොයන්න.

54. ස්කන්ධය m kg වන අංශුවක් ස්කන්ධය 3m kg වන පියන වසන ලද පෙට්ටියක පියනේ කේන්ද්‍රයෙන් එල්ලෙමින් පවතින a වන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට අමුණා ඇත. පෙට්ටිය රළු තිරස් තලයක් මත නිශ්චලව තබා ඇත. තන්තුව තදව සිටින සේ අංශුව පියනට ලංව තබා මුදාහරිනු ලැබේ. පෙට්ටිය චලිත නොවේයැයි උපකල්පනය කර මේසයෙන් පෙට්ටිය මත ඝර්ෂණ බලය හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



පෙට්ටිය ලිස්සා නොයාමට අවශ්‍යතාව $\mu \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$\theta = 60^0$ විට තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3mg}{2}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

55. දිග l වූ A හිදී දෘඪ ලක්ෂයකට සම්බන්ධ කොට ඇති AB සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ද, B හිදී තන්තුවට සම්බන්ධ කොට ඇති m ස්කන්ධයකින් ද අවලම්බයක් සමන්විත වේ. A හරහා යන තිරස් රේඛාවේ A වල සිට $l \cos \alpha$ දුරකින් පිහිටි ලක්ෂයක සිට B නිදහසේ වැටීමට හරින ලද නම්, තන්තුව තද වන මොහොතේ දී B වල ප්‍රවේගය සොයන්න. අනතුරුව අවලම්බය $2 \cos^{-1} (\sin^3 \alpha)$ කෝණයකින් දෝලනය වන බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතියේ උපරිම හා අවම අගයන් සොයන්න.

56. m ස්කන්ධයක් ඇති අංශුවක් දිග $2a$ වූ ඡේදක ආතතිය 10 mg වූද ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවකින් A අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා තිබේ. ආරම්භයේ දී A ට සිරස් ලෙස පහළින් එල්ලෙමින් තිබෙන අංශුව $4\sqrt{ag}$ වේගයකින් සිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. ඉක්බිතිව ඇතිවන චලිතයේදී තන්තුව නොකැඩෙන බව පෙන්වන්න.

තන්තුව තිරස්වත්ම A ට a දුරක් ඈතින් පිහිටි p අචල නාදැත්තක ගැටී අංශුව p වටා භ්‍රමණය වීමට පටන් ගනී නම්, නාදැත්තේ ගැටුණු විගසම තන්තුව කැඩෙන බව පෙන්වන්න.

57. $5a$ දිගැති AB ලුහු තන්තුවක් A හිදී ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා තිබෙයි. එය B හිදී බර අංශුවක් දරයි. තන්තුව සිරස් පිහිටීමක ඇදී සිටින සේ තබාගෙන ඉක්බිති B කෙළවර මුදා හරිනු ලැබේ. එය සිරස් පිහිටීමට ළඟාවත්ම A ට සිරස් ලෙස පහළින් $3a$ දුරින් පිහිටි කුඩා නාදැත්තක් සමඟ ස්පර්ශ වෙයි. තන්තුවේ ආතතිය වහාම දෙගුණ වන බවත්, අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී අංශුව C කේන්ද්‍රය වශයෙන් ඇති සම්පූර්ණ වෘත්තයක් හරියටම ගෙවාලන බවද පෙන්වන්න.

58. තිරස් තලය මත අරය am හා කේන්ද්‍රය O වන ගෝලය අචලව සවිකර ඇත. ගෝලයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ස්කන්ධය m kg වන A අංශුවක් සමතුලිතව ඇත. ස්කන්ධය 2m kg වන B අංශුවක් තිරස්ව $3\frac{\sqrt{ag}}{2}$ ms^{-1} ප්‍රවේගයෙන් චලිතව A හා ගැටී හාවේ. සංයුක්ත අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත්වන ලක්ෂ්‍යයට O සිට සිරස් උස සොයන්න.
අංශුව තිරස් තලයේ වදින ලක්ෂ්‍යයට ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයේ සිට තිරස් දුර $2a$m බව පෙන්වන්න.

59. ස්කන්ධ m kg වන අංශුවක් 3 am දිග අවිතන්‍ය තන්තුවකින් අචල O වලින් එල්ලා ඇත. සමතුලිත පිහිටීමෙන් අංශුව u ms^{-1} වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. තන්තුව තිරස් වන විට O සිට $2a$ දුරින් A හි සුමට නාදැත්තක වැදී යන්තමින් සම්පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යයි නම්, u වේගයේ අවම අගය සොයන්න.

60. සුමට කුහර සිලින්ඩරයක් අක්ෂය තිරස් වන සේ අචලව සවිකර ඇත. තිරස් විෂ්කම්භයේ සිට කුහර සිලින්ඩරයේ ඇතුළු පෘෂ්ඨයේ ස්කන්ධය m kg වන අංශුවක් සිරස් වෘත්තයේ චලිත වනසේ මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුව පහළම ලක්ෂ්‍යයේ දී 2m kg ස්කන්ධය සමඟ ගැටී හාවේ. ඉන්පසු සංයුක්ත අංශුව දෝලනය වන කෝණය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

61. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් 2m හා m වූ A සහ B සුමට ප්‍රත්‍යස්ථ ගෝල දෙකක් දිග a බැගින් වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකකින් O අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට එල්ලා ඇත. A ගෝලය තන්තුව තදව පවතින සේ යටි සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පිහිටීම තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. තන්තුව සිරස්ව නිශ්චලතාවයෙහි ඇති B ගෝලයෙහි A ගෝලය වැදෙයි. ඉන්පසු යටි සිරස සමඟ $\pi - \alpha$ කෝණයක් සාදන පිහිටීමක් කරා B එළැඹීමත් සමඟ තන්තුව ලිහිල් වේ. $e = \frac{3}{4}$ නම් $\cos\alpha = \frac{13}{103}$ බව පෙන්වන්න. මෙම මොහොතෙහි B ගෝලයේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

62. සුමට තිරස් කම්බියක් මත චලනය වීමට නිදහස් ලෙස ස්කන්ධය M වූ මුදුවක් අමුණා ඇත. මුදුවේ සිට a දිගැති අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් එල්ලා ඇත. තන්තුව තදව ඇතිව, යටි සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පිහිටීමක තබා අංශුව මුදා හරිනු ලැබේ. තන්තුව සහ කම්බිය එකම සිරස් තලයක පිහිටා ඇතැයි සලකමින් තන්තුව සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට $a\dot{\theta}^2 (M + m\sin^2\theta) = 2(M+m)(\cos\theta - \cos\alpha)g$ බව පෙන්වන්න.

63. දිග a වූ AB සැහැල්ලු දණ්ඩක A කෙළවර නිදහසේ හැරවීමට හැකි පරිදි අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසවු කර B කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳා තිබේ. A ට සිරස්ව පහළින් B ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ ඇති විට අංශුවට $2\sqrt{ga}$ තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. දණ්ඩ තිරස් පිහිටීමක් කරා ළඟාවීමට ගතවන කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\, ln(\sqrt{2}+1)$ බව පෙන්වන්න.

F

64. m ස්කන්ධයෙන් යුතු P නම් අංශුවක් l දිගැති ලුහු තන්තුවක් මඟින් A අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා තිබෙයි. A ට පහළින් $l\cos\alpha$ ගැඹුරකදී $l\sin\alpha$ අරය සහිත තිරස් වෘත්තාකාර කක්ෂයක් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයක් සහිතව P අංශුව සලකුණු කරයි. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

65. අඩ සිරස් කෝණය α වන කුහර කේතුවක් එහි අක්ෂය සිරස්ව ශීර්ෂය පහතට පිහිටන පරිදි තබා ඇත. කේතුවේ සුමට අන්තඃපෘෂ්ඨය මත අංශුවක් u වේගය සහිතව අරය a වන තිරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරයි. $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{ag}{u^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

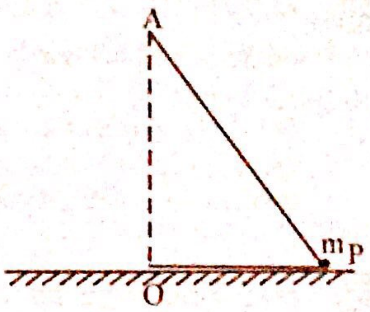
66. දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් R නම් කුඩා සුමට අචල මුදුවක් තුළින් ගමන් කරයි. ස්කන්ධය m සහ λm $(\lambda > 1)$ වන P සහ Q අංශු තන්තුවේ කෙළවරට ගැට ගසා ඇත. කේන්ද්‍රය ලෙස ඇති C ලක්ෂ්‍යයක් වටා ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක් ගෙවා යයි. R ට සිරස් ලෙස පහළින් C පිහිටයි නම් හා C හිදී Q නිශ්චලතාවේ පවතියි නම්,

(i) $\omega^2 = g(1+\lambda)/l$ සහ

(ii) තන්තුව මුදුව මත $mg\sqrt{2\lambda(1+\lambda)}$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් යොදන බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

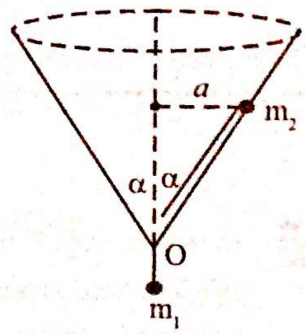
67. am දිග අවිතන්‍ය සුමට තන්තුවක ස්කන්ධය m kg වන P පබළුවක් චලිතවීමට නිදහස් වේ. තන්තුවේ එක් කෙළවරක් සුමට මේසයේ O ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. අනෙක් කෙළවරට O ට λam ($\lambda < 1$) සිරස්ව ඉහළින් A ට සවිකර ඇත. P අංශුව මේසය ස්පර්ශව තත්$^{-1}$ රේඩියන් ω කෝණික ප්‍රවේගයෙන් O කේන්ද්‍රය අරය r වන තිරස් වෘත්තයක චලිත වේ. r හි අගය $a\lambda$ ඇසුරින් සොයන්න.



(i) තන්තුවේ ආතතිය $\frac{1}{4}ma\omega^2(1-\lambda^4)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) අංශුව හා මේසය අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා චලිතයේ ආවර්ත කාලය $\pi\sqrt{\frac{2a\lambda(1-\lambda^2)}{g}}$ අගය ඉක්ම විය යුතු බව පෙන්වන්න.

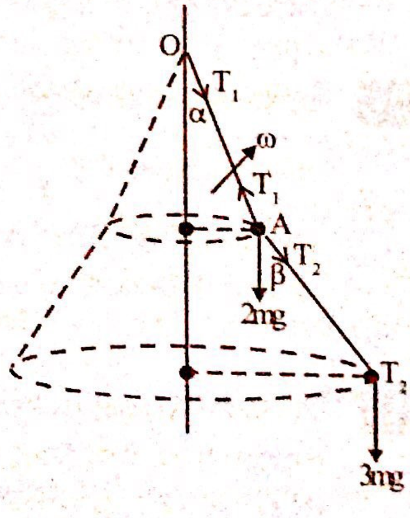
68. අඩ සිරස් කෝණය α වූ කුහර යටිකුරු සෘජුවෘත්තාකාර කේතුවක් රූපයේ දැක්වේ. පෘෂ්ඨය සුමට වේ. m_1, m_2 අංශු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා ඇත. තන්තුව O හි සිදුර තුලින් ගොස් ඇත.



m_2 අංශුව පෘෂ්ඨය ස්පර්ශව අරය a වන තිරස් වෘත්තයක ω කෝණික ප්‍රවේගයෙන් චලිත වේ. m_1 අංශුව සිරස්ව එල්ලී සමතුලිත වේ. අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියා හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

$\omega^2 = \frac{(2m_1 + \sqrt{3}m_2)g}{am_2}$ බවද පෙන්වන්න.

69. අවිතන්‍ය am දිග තන්තුව O ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. අනෙක් කෙළවර 2m kg ස්කන්ධය ඇති A අංශුව සවිකර ඇත. A ට ඈඳූ am දිග අවිතන්‍ය තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර 3m kg අංශුව සවිකර ඇත. තන්තු දෙකම ඇතුලත් පද්ධතිය $\sqrt{\frac{2g}{a}}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් O තුළින් සිරස් රේඛාව වටා භ්‍රමණය වේ.



$5\tan\alpha = 2(5\sin\alpha + 3\sin\beta)$ හා $\tan\beta = 2(\sin\alpha + \sin\beta)$ බව පෙන්වන්න. $\tan\beta = \frac{12}{5}$ නම් $\sin\alpha = \frac{18}{65}$ බව ලබාගන්න.

70. අචල O ලක්ෂ්‍යයෙන් ප්‍රත්‍යස්ථ ස්වභාවික දිග am වන තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය m kg අංශුව එල්ලා ඇත. තන්තුව ඇදුනු විට දිග lm වේ. අංශුව තත්$^{-1}$ රේඩියන් ω කෝණික ප්‍රවේගයෙන්, තිරස් වෘත්තයක චලිත වේ. ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය 4mg වේ. ω සොයා තන්තුවේ සිරසට ආනතිය ද ලබාගන්න.

Scanned with CamScanner

71. තිරසට α ආනත වෘත්තාකාර මාර්ගයක අරය am වේ. මාර්ගයේ චලිතවන රථයක ටයර හා මාර්ගය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. u ms^{-1} ට වඩා විශාල ඕනෑම වේගයකින් චලිත වන විට රථය ලිස්සා යයි. $\mu = \dfrac{u^2 - ag\tan\theta}{ag + u^2\tan\theta}$ බව පෙන්වන්න. $\theta = 45$ හා $\mu = \sqrt{2ag}$ නම් $\mu = \dfrac{1}{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

72. සුමට තිරස් තලය මත ස්කන්ධය m kg අංශුවට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තුව සුමට තිරස් තලයේ O ලක්ෂ්‍යය තුළින් දමා තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය M kg අංශුවට සවිකර එය සිරස්ව එල්ලෙමින් සමතුලිතව තබා ඇත්තේ, m අංශුව V ms^{-1} වේගයෙන් අරය rm තිරස් වෘත්තයක චලිත කරවීමෙනි. V හි අගය සොයන්න. I ආවේගයක් තලය දිගේ m අංශුවට යෙදීමෙන් ක්ෂණිකව නිසල කර ඇත. $I = \sqrt{mMVg}$ බව පෙන්වන්න. m අංශුව සිදුර ආසන්නයට එන ප්‍රවේගය $\sqrt{\dfrac{2Mrg}{m+M}}$ බව පෙන්වන්න.

පසුගිය විභාග ගැටළු

73. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට අරය a ද, කේන්ද්‍රය O ද වන වෘත්තයක ආකාරයෙන් යුත් සිහින් සුමට ඒකාකාර නලයක් තුළ නිදහසේ චලනය විය හැකිය. එහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වූ A හිදී යෙදූ කලම්පයක් මඟින් නලය සිරස් තලයක සිටින සේ තබා ඇත. ඉහළම ලක්ෂ්‍යය වූ B හි සිට අංශුව සීරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබෙයි. $\theta = B\hat{O}P$ විට, A හි වූ කලම්පයෙන් යෙදෙන බව යුග්මයේ G ඝූර්ණය $G - mga\sin\theta\,[2 - 3\cos\theta]$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. θ හි ශ්‍රිතයක් වශයෙන් වූ G හි වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. *[1978]*

74. අංශුවක් a අරයෙන් යුත් සුමට සිරස් වෘත්තයක ඇතුළු පැත්ත මත චලනය වෙයි. වෘත්තයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ දී $\sqrt{\dfrac{7ag}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් වෘත්තය දිගේ අංශුව ප්‍රක්ෂේප කළහොත් එය වෘත්තයෙන් ඉවත්වන බව පෙන්වා එසේ වන්නේ කොතැනදී දැයි සොයන්න. ඉන් ඉක්බිතිව ඇතිවන චලිතයේදී අංශුව වෘත්තයේ පහළම ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බවත් පෙන්වන්න. *[1979]*

75. $5a$ දිගැති AB ලුහු තන්තුවක් A හිදී ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා තිබෙයි. එය B හිදී බර අංශුවක් දරයි. තන්තුව සිරස් පිහිටීමකදී ඇදී සිටින සේ තබාගෙන ඉක්බිති B කෙළවර මුදා හරිනු ලැබේ. එය සිරස් පිහිටීමට ළඟාවත්ම A ට සිරස් ලෙස පහළින් $3a$ දුරින් පිහිටි කුඩා නාදැත්තක් සමඟ ස්පර්ශ වෙයි. තන්තුවේ ආතතිය වහාම දෙගුණ වන බවත්, අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී අංශුව C කේන්ද්‍රය වශයෙන් ඇති සම්පූර්ණ වෘත්තයක් හරියටම ගෙවාලන බව ද පෙන්වන්න. *[1979]*

Scanned with CamScanner

76. a අරයෙන් යුත් අචල සුමට ගෝලීය කබොලක් තුළ චලනය වීමට නිදහසේ ඇති අංශුවක් කබොලේ පහළම p ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{\lambda ag}$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. $2 < \lambda < 5$ නම්, අංශුව ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට පෙර කබොල හැර යන බවත් අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී එය p ට ඉහළින් $\dfrac{a(8-\lambda)(1+\lambda)^2}{54}$ උසකට ළඟාවෙන බවත් පෙන්වන්න. *[1980]*

77. a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා තිබේ. එහි නිදහස් කෙළවර m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් දරයි. P අංශුව O හා එකම තිරස් මට්ටමෙහි O සිට $a \sin \alpha$ දුරකින් අල්ලා තබාගනු ලැබේ. ඉන්පසුව එය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. OP තන්තුව යටියත් සිරසට $\cos^{-1}(\cos^3\alpha)$ කෝණයකින් ආනත වූ විට P අංශුව නැවතත් ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට ළඟාවෙන බව පෙන්වන්න. අනතුරුව සිදුවන අංශුවේ චලිතයේදී තන්තුවෙහි උපරිම හා අවම ආතති සොයන්න. *[1981]*

78. P අංශුවක් a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ඇසුරෙන් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සබැඳ තිබේ. සිරස් ලෙස ඉහළින් a උසකදී P අල්ලා තබාගෙන එය තිරස් දිශාවක් ඔස්සේ u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ.

(i) $u^2 \geq ag$ නම්, P අංශුව සම්පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $u^2 < ag$ නම්, P අංශුව $2\left\{\dfrac{a}{g}\left(1-\dfrac{u^2}{ag}\right)\right\}^{1/2}$ කාලයක් ගුරුත්වය යටතේ නිදැල්ලේ චලනය වන බව පෙන්වන්න. *[1981]*

79. ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් අභ්‍යන්තර අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වන අචල කුහර ගෝලයක සුමට අන්තඃපෘෂ්ඨය මත සිරස් වෘත්තය චලනය වේ. වෘත්තයේ තලය O හරහා යනු ලැබේ. අංශුව u තිරස් ප්‍රවේගයකින් ගෝලයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය V ද, අංශුව හා ගෝලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්, $V^2 = u^2 - 2ag(1+\cos\theta)$ සහ $R = \dfrac{m}{a}\{u^2 - ag(2+3\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.
$u^2 = (2+\sqrt{3})ag$ නම්, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ තැනදී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන බව ද, එහි පරාවක්‍රය O හරහා යන බව ද පෙන්වන්න. *[1989]*

80. (i) m ස්කන්ධයෙන් යුත් p නම් අංශුවක් l දිගැති ලුහු තන්තුවකින් අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා තිබේ. A ට පහළින් $l\cos\alpha$ ගැඹුරක දී $l\sin\alpha$ අරය සහිත තිරස් වෘත්තාකාර කක්ෂයක් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයක් සහිතව p අංශුව සලකුණු කරයි.

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{g}{l.\omega^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(ii) m ස්කන්ධය සහිත උපග්‍රහයෙක් අරය b වන වෘත්තාකාර කක්ෂයක් පොළොවේ සමක තලයේ සලකුණු කරයි. පොළව හා උපග්‍රහයා එකිනෙකට ආකර්ෂණය වන්නේ $Y\frac{Mm}{r^2}$ යනුවෙන් දැක්වෙන බලයකිනි. මෙහි M යනු පොළවේ ස්කන්ධය ද, r යනු පොළවත්, උපග්‍රහයාත් අතර දුර ද, Y යනු නියතයක් ද වේ. පොළව භ්‍රමණය වන්නේ ω කෝණික ප්‍රවේගයක් සහිතව නම්, පොළවට සාපේක්ෂව උපග්‍රහයා නිශ්චලතාවයේ පවතින්නේ $b = \left(\frac{yM}{\omega^2}\right)^{1/3}$ වන විට බව පෙන්වන්න. [1989]

81. සුමට පටු කුහර බටයක් කේන්ද්‍රය O ද, අරය a ද වූ වෘත්තයක හැඩයට නමා එහි තලය සිරස්ව තිබෙන සේ සවිකර ඇත. පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m හා km වන P හා Q අංශු දෙක $\frac{\pi a}{2}$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ඈඳා බටය තුළ තබා ඇත්තේ O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් P ද, O හා එකම මට්ටමේ Q ද පිහිටන පරිදිය. තන්තුව බලය තුළ වෙයි. t = 0 කාලයේ දී පද්ධතියේ නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t කාලයක දී OP සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම් යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය උපයෝගී කරගෙන තන්තුව නොබුරුල්ව පැවතුනහොත් $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a(1+k)}(\sin\theta + k\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$ විට පමණක් ඉහත සමීකරණය වලංගු වන බව අපෝහනය කරන්න. අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $k > 3 - 2\sqrt{2}$ නම්, තන්තුව බුරුල් වීමට පෙර ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න. [1991]

82. (i) කේතු අවලම්භයක බට්ටාගේ වේගය v ද, එය චලනය වන වෘත්තයේ අරය r ද වේ. තන්තුවේ දිග l නම්, $v^2 = \frac{gr}{\sqrt{l^2 - r^2}}$ බව පෙන්වා පරිභ්‍රමණ කාලය සොයන්න.

(ii) ස්කන්ධය m වූ පබළුවක් සිරස් තලයක සවිකොට ඇති අරය a වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක අමුණා ඇත. පබළුව u ප්‍රවේගයකින් කම්බියේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. පබළුවේ දෛශික අරය යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට කම්බියේ පිටි අතට ප්‍රතික්‍රියාව R වෙයි නම්, $R = mg\left(2 - 3\cos\theta - \frac{u^2}{ag}\right)$ මගින් R දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. පබළුව ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීම සඳහා u හි අඩුතම අගය ද සොයන්න. [1992]

83. a දිගැති සැහැල්ලු දණ්ඩකට අචල A කෙළවරක් වටා නිදහස් ලෙස හැරෙන්නට හැකිය. එහි අනෙක් B කෙළවරට m බරැති අංශුවක් ගැට ගසා ඇත. A කෙළවර a දිගින් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් A හරහා යන අචල සුමට තිරස් කම්බියක සර්පණය විය හැකි m බරැති කුඩා C මුදුවකට යා කර තිබෙයි. ආරම්භයේ දී A, B, C ඒක රේඛීය වන අතර AC හි දිග $2a$ වේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙහි සිට මුදා හරිනු ලැබේ. $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2g}{a}\right)\left(\frac{\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}\right)$ බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ T ආතතිය θ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස යොදා දණ්ඩේ ආතතියට තන්තුවේ ආතතියේ අනුපාතය 3 : 2 බව පෙන්වන්න. [1994]

Scanned with CamScanner

84. ස්කන්ධය M ද, පාදයක දිග $2a$ ද වූ ඒකාකාර කුහර ඝනකාකාර පෙට්ටියක් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් බට්ටෙක් සහිත l ($< a$) දිගැති සරල අවලම්භයක් පෙට්ටියේ උඩ මුහුණතේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ එල්ලා ඇත. අවලම්භය උඩ මුහුණතේ ගැටෙන්නේ නැතිව සිරසෙන් දෙපසටම සෘජුකෝණ සාදමින් දෝලනය වෙයි. අවලම්භය සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය T සොයන්න.

පිළිවෙලින් ඝර්ෂණ බලය හා පෙට්ටියත්, මේසයත් අතර අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව F හා R නම්, $\frac{F}{R} = \frac{\sin 2\theta}{\lambda + \cos 2\theta}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\lambda = 1 + \frac{2M}{3m}$

μ යනු මේසයත්, පෙට්ටියත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය විට, $\mu \geq \frac{3m}{2\sqrt{M(M+3m)}}$ බව අපෝහනය කරන්න. *[1997]*

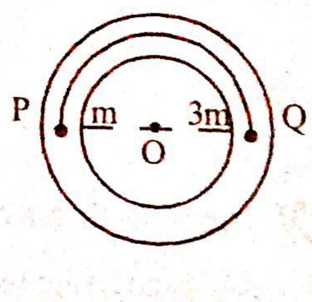
85. කේන්ද්‍රය O සහ අභ්‍යන්තර අරය a වූ අචල කුහර ගෝලයක සුමට අන්තඃපෘෂ්ඨය මත චලනය වීමට නිදහස ඇති P අංශුවක් එම පෘෂ්ඨයේ පහත් ම A ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. ඊලඟට අංශුව පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශව තිබෙන අතරතුරේ දී OP හැරෙන කෝණය θ වන විට පෘෂ්ඨයෙන් අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$2 < n < 5$ වෙයි නම් $\sqrt{\frac{(n-2)ga}{3}}$ වේගයක් සහිතව P අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන බව පෙන්වන්න. පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත් වන්නේ O හි මට්ටමින් $\frac{a}{2}$ උසක තිබිය දී නම්,

(i) $n = \frac{7}{2}$ බවත්

(ii) ගුරුත්වය යටතේ පසුව සිදුවන නිදහස් චලිතයේ දී P හි පෙත A හරහා යන බවත් පෙන්වන්න. *[1999]*

86. රූපයේ දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ වෘත්තයක ආකාරයට නවන ලද පටු සුමට නලයකි. එය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, 3m වූ P, Q අංශු දෙකක් දිග πa වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කරනු ලැබූ නලය තුල බහා ඇත. ආරම්භයේදී පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ.



මුදාහල මොහොතේ සිට t කාලයකදී θ කෝණයකින් OP හැරී ඇත්නම් ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන $a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta \left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

මෙම මොහොතේදී නලයෙන් P අංශුව මත යොදෙන බලය සොයන්න. *[2001]*

Scanned with CamScanner

87. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල ගෝලයක පිටත සුමට පෘෂ්ඨය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයක නිශ්චලතාවයෙහි තබා P අංශුවක් මුදාහරිනු ලැබේ. උඩු සිරස සමඟ OA සාදන සුළු කෝණය α වෙයි. t කාලයේ දී P මෙම පෘෂ්ඨය මතම තිබියදී OP උඩු සිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි.

(i) $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}[\cos\alpha - \cos\theta]$ බවත්

(ii) අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන්නේ $\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha$ වන විටදී බවත් පෙන්වන්න.

[2002]

88. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග a වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. ආරම්භයේදී තන්තුව නොබුරුල්ව P නිසලව තිබියදී I ආවේගයක් OP ට ලම්බ දිශාවකට P ට යොදනු ලැබේ. ඉන්පසු සිදුවන චලිතයේදී යටියත් සිරස සමග θ කෝණයක් OP සාදන විට P හි ප්‍රවේගය V ද තන්තුවේ ආතතිය T ද නම් $V^2 = \frac{I^2}{m^2} - 2ga + 2ga\cos\theta$ සහ $T = \frac{I^2}{ma} - 2mg + 3mg\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

(i) අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යයි නම් $I > m\sqrt{5ag}$ බවද

(ii) OP රේඛාව උඩු සිරස සමග α කෝණයක් සාදන විට අංශුව ඒකාකාර චලිතයෙන් ඉවත් වෙයි නම්, $m\sqrt{2ga} < I < m\sqrt{5ga}$ සහ $\cos\alpha = \frac{I^2}{3m^2ga} - \frac{2}{3}$ බවද අපෝහනය කරන්න.

[2003]

89. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P අංශුවකට සිරස් තලයක අචලව ඇති අරය r හා කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර බටයක් තුළ ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය විය හැකිය. අංශුව බටයේ පහත්ම ලක්ෂයේ සිට $\sqrt{3gr}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරයි. අංශුවේ චලනය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යොදාගත හැකි ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න.

OP යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ වේගය V නම් $V^2 = gr(1 + 2\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් අංශුව මත බටයේ ප්‍රතික්‍රියාව $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ විට එහි දිශාව වෙනස්වන බව පෙන්වා ඒ ලක්ෂයේ දී අංශුවේ වේගය සොයන්න.

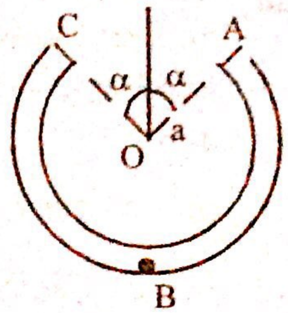
[2004]

90. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් O අචල ලක්ෂයකට ඈඳා ඇත. තන්තුව නුබුරුල්ව හා යටිඅත් සිරස සමග α ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදන අයුරින් අංශුව රඳවා ඇතිවිට අංශුවට OP ඔස්සේ යන සිරස් තලයෙහි තන්තුවට ලම්භව u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබෙයි. අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙහි යෙදෙන බව උපකල්පනය කරමින් OP යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ පිහිටුම් සැලකීමෙන් අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ලියා දක්වන්න. $ga(3 + 2\cos\alpha) > u^2 > 2ga\cos\alpha$ වෙතොත් යටිඅත් සිරස සමග OP, $\cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha - \frac{u^2}{ga}\right)\right]$ කෝණයක් සාදන තෙක් අංශුව වෘත්තාකාර චාපයක් සලකුණු කරන බවත්, අනතුරුව ගුරුත්වය යටතේ නිදහස්ව චලනය වීමට ආරම්භ කරන බවත් පෙන්වන්න.

[2005]

Scanned with CamScanner

91. පහත රූපයේ දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O, අරය a සහ කෝණය $2(\pi - \alpha)$ වූ වෘත්ත චාපයක ආකාරයට නමන ලද ABC සුමට සිහින් නළයකි. මෙහි α සුළු කෝණයක් වෙයි. A, C විවෘත දෙකෙළවර එකම තිරස් මට්ටමේ තිබෙන පරිදි, නළය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. නළය ඇතුළත පහත් ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි අංශුවක් තබා, නළය දිගේ තිරස් ම ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, නළය දිගේ A කෙළවරට පැමිණ අනතුරුව නිදහසේ ගුරුත්ව යටතේ ප්‍රක්ෂිප්තයක් ලෙස චලනය වී, C කෙළවරින් නැවත නළයට ඇතුළු වෙයි.



අංශුව A හි දී නළයෙන් ඉවත්වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයා $u^2 = ga[2(1 + \cos\alpha) + \sec\alpha]$ බව පෙන්වන්න.

තවද, අංශුව ළඟාවන උපරිම උස O ට ඉහළින් $\frac{a}{2}(\cos\alpha + \sec\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

[2006]

92. O කේන්ද්‍රය සහ a අරය සහිත සුමට ගෝලයක් මේසයක තිරස් පෘෂ්ඨය මතට සවිකර ඇත. සුමට P අංශුවක් ගෝලයෙහි පිටත පෘෂ්ඨයෙහි A ලක්ෂයක තබනු ලැබේ. මෙහි OA උඩු සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි. අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

(i) OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට, අංශුව තවමත් ගෝල පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් $\dot{\theta}^2 = 2g(\cos\alpha - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ගෝලය සහ අංශුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව විශාලත්වය සොයන්න.

(iii) මේසයේ සිට $a(1 + \frac{2}{3}\cos\alpha)$ උසකදී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවතට යන බවද පෙන්වන්න.

(iv) ගෝලයෙහි සිරස් විෂ්කම්භයේ සිට අංශුව මේසයට වදින ලක්ෂ්‍යයට දුර d යයි ගනිමු. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ යැයි දී ඇති විට d සොයන්න.

[2007]

93. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල සුමට ගෝලීය කබොලක $\frac{a}{4}$ දුරක් O ට ඉහළින් වූ තිරස් තලයෙන් කැපෙන උඩ කොටස ඉවත් කිරීමෙන් පාත්‍රයක් සාදා ඇත. P අංශුවක් පාත්‍රය ඇතුළත පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට u වේගයකින් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ වේගය සහ පාත්‍රයත් අංශුවත් අතර ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

(ii) $u^2 > \frac{11ga}{4}$ බව දී ඇත්නම්, අංශුව පාත්‍රයේ දාරය හැර යන බව පෙන්වන්න.

(iii) $u^2 > \frac{13ga}{2}$ බව දී ඇත්නම්, අංශුව පාත්‍රයේ දාරය හැර ගිය පසුව ගුරුත්වය යටතේ සිදුවන නිදහස් චලිතයේ දී, අංශුව පාත්‍රය ඇතුළට නොවැටෙන බවත් පෙන්වන්න.

[2008]

Scanned with CamScanner

94. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර, අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර, අංශුව ගුරුත්වය යටතේ සමතුලිතව පවතී. අංශුව ඊළඟට u වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) O හරහා යන යටි අත් සිරස සමග තන්තුව θ කෝණයක් සාදන විට එහි ආතතිය $m\left(3g\cos\theta - 2g + \frac{u^2}{l}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පසුව අංශුව O හි තිරස් මට්ටමට ළඟාවීමට හැකිවන පරිදි u ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය සොයන්න.

(iii) තන්තුව පළමුවරට තිරස් වන විට, එහි චලන තලයට ලම්බව, O සිට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සවිකර ඇති සිහින් තිරස් දණ්ඩක් සමග ස්පර්ශ වෙයි. $2gl < u^2 < \frac{7}{2}gl$ වෙයි නම්, අංශුව දණ්ඩේ මට්ටමෙන් $\frac{l}{2}$ උසකින් පිහිටි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට පෙර තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න. *[2009]*

95. P නම් සුමට අංශුවක් තිරසට $\alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. තිරස් ලෙස P අංශුව චලනය වන මොහොතේ දී එය දිග l වූ අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකින් එල්ලෙමින් නිශ්චලතාවයේ ඇති සමාන ස්කන්ධයෙන් යුත් Q නම් තවත් සුමට අංශුවක් සමඟ ගැටේ. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර තිරස් පීල්ලක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. P අංශුවේ පෙත හා OQ අඩංගු සිරස් තලයට පීල්ල ලම්භ වේ.

(i) ආරම්භයේ දී P හා Q අංශු දෙක අතර තිරස් දුර $\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම්, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශු දෙක පිළිවෙලින් $\frac{(1-e)\,u\cos\alpha}{2}$ හා $\frac{(1+e)\,u\cos\alpha}{2}$ ප්‍රවේගවලින් තිරස් ලෙස චලනය වීමට පටන්ගන්නා බව පෙන්වන්න.

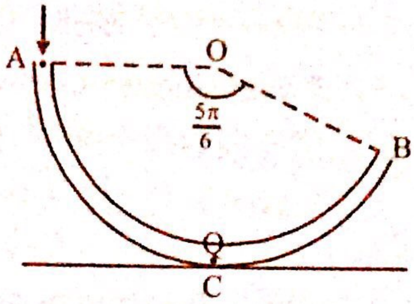
(iii) OQ යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට Q අංශුවේ චලිත සමීකරණයේ OQ දිගේ සංරචකය ද, Q අංශුව සඳහා යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණාව ද ලියා දක්වන්න.

$2u\cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$ නම්, Q අංශු වෘත්ත චලිතය සම්පූර්ණ කරන බව අපෝහනය කරන්න. P අංශුව ගමන් කරන ලද තිරස් දුර $\frac{(3-e)\,u^2 \sin 2\alpha}{4g}$ බව පෙන්වන්න.

e = 3 නම්, P අංශුව ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන බව අපෝහනය කරන්න. *[2010]*

Scanned with CamScanner

96. අරය a වූ ද, ස්වකීය කේන්ද්‍රය වන O හි $\frac{5\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද, වෘත්තාකාර චාපයක හැඩය ඇති සුමට සිහින් ACB බටයක්, OA තිරස්ව ද බටයෙහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වන C, අචල තිරස් පොළොවක් ස්පර්ශ කරමින් ද සිරස් තලයක, රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් $\sqrt{2ga}$ වේගයෙන් A කෙළවරේදී බටය තුළට සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි.



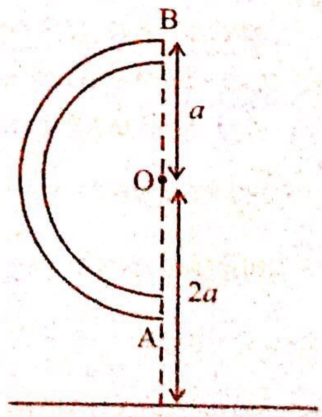
(i) OP රේඛාව OA සමග $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවෙහි වේගය $\sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ බව ද, P අංශුව මත බටයෙන් ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි විශාලත්වය $mg(2+3\sin\theta)$ බව ද පෙන්වන්න.

(ii) P අංශුව C ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන විට, බටය තුළ C ලක්ෂ්‍යයෙහි නිසලව ඇති ස්කන්ධය m වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටෙයි. P හා Q අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වෙයි. ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවෙහි වේගය සොයා, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\frac{1}{2}\sqrt{ga}$ හා $\frac{3}{2}\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) P අංශුව කිසිවිටෙක බටය හැර නොයන බවත්, Q අංශුව $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේගය සහිතව B කෙළවර වෙත ළඟාවෙන බවත් පෙන්වන්න. Q අංශුව බටය හැරගිය පසු එය පොළොවෙහි සිට ළඟාවන උපරිම උස සොයන්න. තිරස් දුර $\frac{3a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ බව පෙන්වන්න.

[2011]

97. අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයට වන සිහින් සුමට AB බටයක්, A හා B කෙළවරවල් යා කරන විෂ්කම්භය සිරස්ව හා O කේන්ද්‍රය තිරස් පොළොවක සිට $2a$ උසකින් පිහිටන සේ, රූපසටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් A පහළ කෙළවරේ දී, $\sqrt{\frac{9ga}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් බටය තුළට තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. OP යටි සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට, P අංශුවේ වේගය $\sqrt{\frac{9ga}{2}(5+4\cos\theta)}$ බව හා බටයෙන් P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{mg}{2}(5+6\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.



Scanned with CamScanner

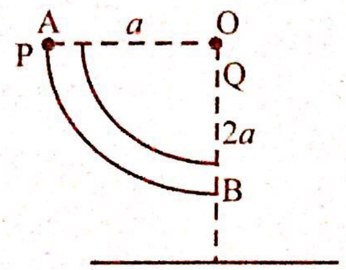
P අංශුව B ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන බවත් මෙම චලිතයේ දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බවත් අපෝහනය කරන්න.

P අංශුව B ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන විට, එය B හි දී බටය තුළ නිසලව ඇති ස්කන්ධය m වූ තවත් Q සුමට අංශුවක් සමඟ ගැටේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P හා Q අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\frac{(1-e)}{2}\sqrt{\frac{ga}{2}}$ හා $\frac{(1+e)}{2}\sqrt{\frac{ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි e යනු අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ. P හා Q අංශු, පොළොව මත එකිනෙකට a දුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය දෙකක් වෙත වැටේ නම්, $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ බවත් පෙන්වන්න.

[2011 පැරණි නිර්දේශය]

98. අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ චතුර්ථ භාග වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයට වන සිහින් සුමට AB බටයක්, OA තිරස් ද, OB සිරස් ද, O කේන්ද්‍රය තිරස් පොළොවක සිට $2a$ උසකින් ද පිහිටන පරිදි රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ P නම සුමට අංශුවක් A හිදී නිශ්චලතාවෙන් බටය දිගේ සිරස් ව පහළට මුදා හැරේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යොදා ගනිමින්, B ලක්ෂ්‍යයේ දී P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.



ස්කන්ධය m වූ Q නම් වෙනත් සුමට අංශුවක්, P හා Q අංශු තිරස් ලෙස B හිදී ගැටෙන ආකාරයට, O හිදී නිශ්චලතාවෙන් සිරස්ව පහළට මුදා හැරේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු, P අංශුවේ ප්‍රවේගය හා Q අංශුවේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සංරචකය පිළිවෙළින් $\frac{1}{2}(1-e)\sqrt{2ga}$ හා $\frac{1}{2}(1+e)\sqrt{2ga}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ. $e = \sqrt{2} - 1$ නම්, එවිට P හා Q අංශු දෙක පොළොව මත එකම ලක්ෂ්‍යයකට වැටෙන බව පෙන්වන්න. මෙම වැටීම් දෙක අතර කාලය සොයන්න.

[2012 පැරණි නිර්දේශය]

99. ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O නම් ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. සිරස් තලයක අංශුව නිදහස් ලෙස එල්ලෙමින් පවතින විට සිරස් තලයේ OP ට ලම්බව $\sqrt{2gl}$ ප්‍රවේගයක් අංශුවට දෙනු ලැබෙයි. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යොදා ගනිමින්, OP යටි අත් සිරස සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න. මෙම මොහොතේදී තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}$ mg බව පෙන්වන්න.

[2012 පැරණි නිර්දේශය]

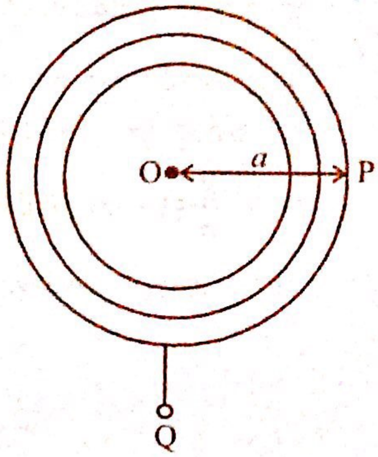
Scanned with CamScanner

100. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ අචල ගෝලයක සුමට බාහිර පෘෂ්ඨයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය 2m වූ වෙනත් Q අංශුවක් තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් P සමඟ සරල ලෙස ගැටෙයි. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න. *[2012 නව නිර්දේශය]*

101. OP අරය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට තවමත් P අංශුව ගෝලය සමඟ ස්පර්ශව ඇතැයි උපකල්පනය කරමින්, P අංශුව මත ගෝලය මගින් ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{m}{a}\ [ga(3\cos\theta - 2) - u^2]$ බව පෙන්වන්න.

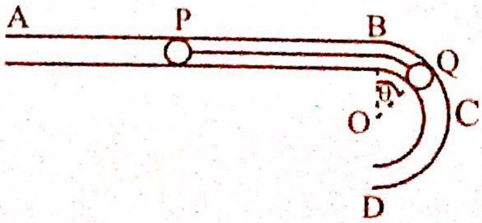
$u = \sqrt{ga}$ නම්, Q සමඟ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව ගෝලීය පෘෂ්ඨය හැරයන බවද පෙන්වන්න. *[2013]*

102. අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර නළයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $\frac{3\pi a}{2}$ ට වඩා වැඩි සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක, එක් කෙළවරක්, OP තිරස් ව ඇතිව නලය තුළ අල්වා තැබූ ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නළය තුළින් ද නළයේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති කුඩා සුමට සිදුරක් තුළින් ද යමින් අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය 2m වූ Q අංශුවක් දරා සිටියි. තන්තුව තදව ඇතිව ඉහත පිහිටීමෙන් P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $\theta\ (0 < \theta < \frac{3\pi}{2})$ කෝණයකින් OP හැරී ඇති විට P අංශුවේ වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}\ (2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, P අංශුව මත නලයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. *[2014]*

103. ABCD සිහින් සුමට නලයක් පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට නවා ඇත. නලයේ AB කොටස ඍජු වේ. BCD කොටසට අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ වෘත්තාකාර හැඩයක් ඇති අතර BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වේ.



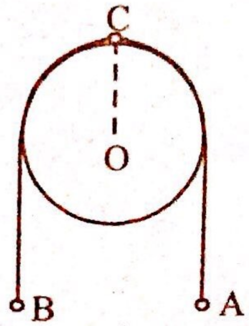
AB තිරස් ව හා ඉහළින් ම ඇතිව නලය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. නලය ඇතුළත, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය 3m වූ Q අංශුවක් $l \left(> \frac{\pi a}{2}\right)$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී, තන්තුව ඇදී AB දිගේ තිබෙන අතර Q අංශුව B ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත.

Scanned with CamScanner

Q අංශුව මෙම පිහිටීමේ සිට යන්තමින් විස්ථාපනය කරනු ලැබීමෙන් t කාලයක දී OQ අරය θ සුළු කෝණයකින් හැරේ.

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුවේ ත්වරණය $\frac{3g}{4}\sin\theta$ බව පෙන්වන්න. t කාලයේ දී Q අංශුව මත තලයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. *[2015]*

104. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් දිග $l\ (> 2\pi a)$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඇඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය 2m වූ C අංශුවක් තන්තුවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඇඳනු ලැබේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අචල සුමට ගෝලයක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයෙහි C අංශුව ඇතිව ද A හා B අංශු O තුළින් වූ සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් ද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව ගෝලය මතින් තබා ඇත.



සරල රේඛීය පෙතක A අංශුව පහළට චලනය වන පරිදි C අංශුවට ගෝලය මත එම සිරස් තලයේ ම කුඩා විස්ථාපනයක් දෙනු ලැබේ. C අංශුව ගෝලය සමග ස්පර්ශව ඇතිතාක් $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OC හැරී තිබෙන කෝණය වේ. $\theta = \frac{\pi}{3}$ වන විට C අංශුව, ගෝලය අතහැර යන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න. *[2017]*

Scanned with CamScanner